



THESE

présentée pour l'obtention du diplôme de

**Docteur de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées**

Spécialité : Structures et Matériaux

par

**Céline FLORENCE**

Sujet de la thèse :

**ETUDE EXPERIMENTALE DE LA  
FISSURATION REFLECTIVE  
et  
MODELISATION DE LA RESISTANCE  
DE STRUCTURES CELLULAIRES**

Soutenue le 14 avril 2005 à l'ENPC

devant le jury composé de :

*Rapporteurs :* C. BOUTIN  
C. PETIT

*Examineurs :* G. FORET  
J.P. MICHAUT  
P. TAMAGNY

*Directeur de Thèse :* A. EHRLACHER

*Invité :* J.Y. SENER



*A mes parents*



# Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire d'Analyse des Matériaux et d'Identification (LAMI) sous la direction de Alain EHRLACHER. Je tiens à lui exprimer ici ma profonde reconnaissance pour sa confiance, son aide scientifique et pour la richesse de ses idées. Etudier les matériaux et la mécanique avec lui fut un réel plaisir.

Ma gratitude va aussi à Gilles FORET pour m'avoir encadrée dans la bonne humeur durant ces quatre dernières années. Sa créativité et sa patience dans le domaine expérimental ainsi que ses qualités humaines m'ont énormément appris.

Je remercie Karam SAB de m'avoir accueillie au LAMI et d'avoir dirigé une partie de mes travaux. Au cours de ma thèse, il a su être toujours disponible pour m'orienter, me conseiller et m'offrir son soutien scientifique.

Ma thèse s'est déroulée en convention CIFRE avec le centre de Recherche et Développement Cockerill Sambre (RDCS) du Groupe ARCELOR. Aussi, mes plus vifs remerciements vont également à Jean-Yves SENNER. Grâce à ses conseils et son soutien, j'ai eu la chance de découvrir, de comprendre et de participer au déroulement d'un projet de recherche industrielle.

Je tiens aussi à remercier Philippe TAMAGNY pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse mais aussi pour l'intérêt avec lequel, il a suivi mes travaux. Ses conseils, son dynamisme et ses encouragements m'ont été d'un grand soutien.

Messieurs Claude BOUTIN et Christophe PETIT ont accepté de rapporter sur cette thèse. J'en suis honorée et je les en remercie sincèrement.

Je remercie aussi Monsieur Jean-Paul MICHAUT qui a accepté de participer au jury et qui a bien voulu juger mon travail.

J'adresse mes sincères remerciements à l'équipe technique du LAMI. Didier BERG, Christophe BERNARD, Daniel CINTRA et Gilles MOREAU ont toujours été disponibles pour m'aider et répondre à mes nombreuses questions concernant les manipulations expérimentales.

J'exprime aussi ma gratitude aux équipes techniques du LCPC Nantes, du LRPC Autun et de Probinord, sans qui la fabrication des éprouvettes des essais SIFIRE et FABAC, ainsi que la réalisation des essais FABAC et de retrait-flexion n'auraient pas été possibles.

En particulier, je tiens à rendre hommage aux qualités pédagogiques de François TRAVERS du LCPC Nantes qui m'a fait découvrir les secrets de fabrication, de caractérisation et de mise en place des matériaux bitumineux.

Je tiens également à remercier Louissette WENDLING du LRPC Autun pour son accueil chaleureux, sa grande disponibilité et les enrichissantes discussions que nous avons eues concernant les essais de retrait-flexion.

Je voudrais remercier chaleureusement tous les membres du LAMI, doctorants, permanents et stagiaires, avec qui les échanges scientifiques, techniques ou amicaux ont été très formateurs pour ma vie professionnelle et ont fait de ces quatre années une belle étape de ma vie.

Je remercie aussi tous mes amis pour la motivation que leur amitié m'a apportée. Leur soutien, leur enthousiasme et leur sens de l'humour m'ont permis d'aller au bout de cette aventure qu'est la thèse.

Enfin et avant tout, je tiens à remercier du fond du coeur, ma famille, ma tribu, qui a su me donner sans cesse son soutien, son amour et l'envie d'apprendre encore plus. Elle était et continuera d'être, je le sais, un soutien sans faille.

## Résumé

La thèse qui fait l'objet de ce mémoire s'est déroulée dans le cadre de la collaboration entre le laboratoire et un groupe industriel. Elle traite de deux thèmes reliés par la problématique de l'utilisation de matériaux cellulaires métalliques dans la construction.

Les matériaux alvéolaires sont très appréciés pour leur propriété d'absorption d'énergie, qui est principalement caractérisée par leur domaine de résistance. Nous proposons un modèle analytique rigoureux, basé sur des techniques d'homogénéisation, permettant de prédire ce domaine de résistance pour une géométrie quelconque de structures cellulaires périodiques. Après validation, nous utilisons ce modèle pour étudier l'influence de défauts d'uniformité et de symétrie de distribution de la matière le long des parois des cellules. Ces travaux menés sur des cellules bidimensionnelles et tridimensionnelles conduisent à conclure que la non-uniformité modifie considérablement la taille et la forme du domaine de résistance, mais que la non-symétrie a une incidence plus faible.

La fissuration réfléctive est une dégradation caractéristique des chaussées semi-rigides. Elle est due à la propagation jusqu'à la surface des fissures de retrait des assises traitées aux liants hydrauliques. Parmi les différents procédés existants pour retarder cet endommagement, nous nous intéressons aux solutions de type interfaces, souples ou rigides, insérées entre les assises et la couche de roulement. Lorsqu'elles sont rigides, elles se présentent sous forme de grilles et permettent de renforcer la couche supérieure puis de ponter les fissures. Nous avons mis en évidence qu'il était nécessaire de développer un essai à une échelle intermédiaire par rapport aux tests existants. Nous avons conçu cet essai en se basant sur la reproduction dans l'éprouvette, de variations de fonctions particulières calculées dans une chaussée.

**Mots-clés :** Chaussée, Fissuration réfléctive, Essai de fissuration  
Matériaux cellulaires, Structures périodiques, Domaine de résistance,  
Homogénéisation

---

## Abstract

The thesis is a part of the collaboration between the laboratory and an industrial company. It deals with two topics, connected by the problem of using cellular metal materials in construction.

One of the major areas of application of cellular materials is energy absorption. This property can be characterized by the plastic yield. We propose a rigorous analytical model, based on homogenization methods, to predict the plastic yield of general periodic lattices. After validation, we use this model to study the influence of defects of uniformity and symmetry of material distribution along the walls of the cells. This work which is carried out on two-dimensional and three-dimensional cells leads to conclude that non-uniformity changes plastic yield's size and form, but non-symmetry has less significant incidence.

Reflective cracking is generally observed in semi-rigid pavements. It can be explained by the propagation of shrinkage cracks, at the bases treated with hydraulic binders, into bituminous wearing layer. Among the existing methods to slow down this damage, we focus on the interlayers solutions, flexible or rigid, inserted between bases and wearing layer. Rigid ones are grid layers and have to reinforce the overlayer, then to bridge over the cracks. We have highlighted that a new test with an intermediate scale compared to the existing tests is needed. We designed this test with the aim to reproduce in the sample, the variations of characteristic functions calculated in pavement.

**Mots-clés :** Pavement, Reflective cracking, Crack test  
Cellular materials, Periodic lattices, Plastic yield surface, Homogenization





# Avant-propos

La thèse qui fait l'objet de ce mémoire, s'est déroulée sous la forme d'une Convention Industrielle de Formation par la Recherche (CIFRE) et s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire d'Analyse des Matériaux et Identification (LAMI), laboratoire de l'Institut Navier, et Recherche et Développement Cockerill Sambre (RDCS), centre de recherche du Groupe ARCELOR.

Le contexte de cette collaboration est présenté schématiquement à la figure Fig. 1. En effet, une des orientations de recherche du Groupe ARCELOR est l'utilisation de structures cellulaires métalliques dans le domaine de la construction. Les applications envisagées sont multiples et pour des raisons de confidentialité, le schéma Fig. 1 ne reprend que les deux thèmes principaux reliés aux sujets traités dans ce mémoire : les dispositifs de sécurité et le renforcement de chaussée. Pour chaque application, différents résultats scientifiques et techniques sont nécessaires. Les tâches qui m'ont été confiées entre autres ont concerné : d'une part, la modélisation du domaine de résistance de structures cellulaires et d'autre part, l'étude expérimentale de la fissuration réfective.

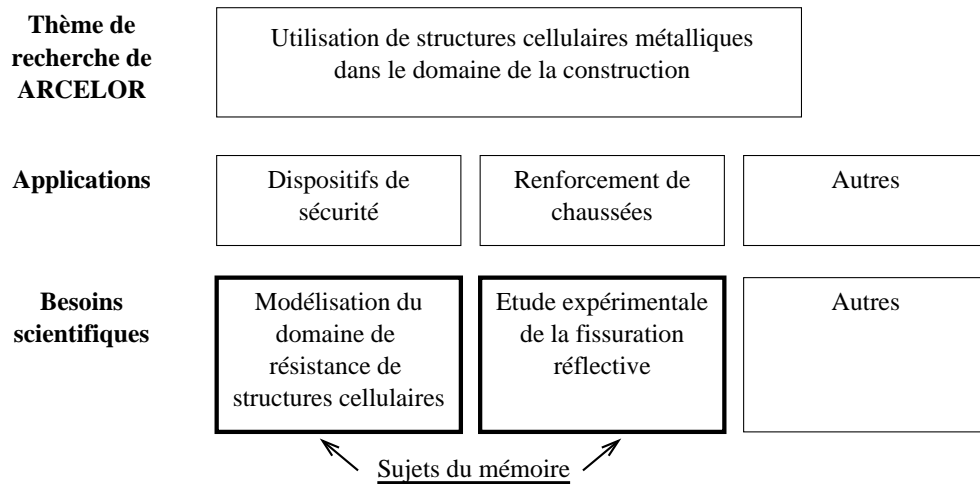


FIG. 1: Présentation du contexte industriel de la thèse

La première partie est consacrée à la modélisation de structures cellulaires bidimensionnelles et tridimensionnelles et à la prédiction de leur résistance ultime. Après avoir proposé le cadre d'un modèle général basé sur des techniques d'homogénéisation des milieux périodiques, nous appliquons celui-ci à des structures hexagonales planes et à des structures tétrakaidécaédrales tridimensionnelles. Enfin, une étude de l'influence de défauts non symétriques sur les parois de ces cellules est effectuée afin d'illustrer les avantages et la facilité de mise en oeuvre de ce modèle.

La seconde partie concerne l'étude expérimentale de la fissuration réfective. En effet, en vue de développer une nouvelle technique permettant de ralentir ce phénomène, nous avons proposé de comparer expérimentalement son efficacité à celle des solutions existantes. Différentes échelles d'essais ont été explorées : de l'éprouvette de laboratoire de quelques centimètres testée pendant

quelques heures à l'éprouvette équivalente à une portion de chaussée de quelques mètres testée pendant quelques semaines. Parmi les moyens expérimentaux existants l'absence d'essai intermédiaire nous a conduit à développer l'essai SIFIRE (SIMulation de FIssuration REflective). L'originalité de la méthode de dimensionnement proposée est de sélectionner plusieurs grandeurs mécaniques caractéristiques du fonctionnement de la chaussée et de concevoir un essai capable de reproduire dans l'éprouvette ces fonctions de références calculées dans la chaussée complète.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Modélisation du domaine de résistance de structures périodiques bidimensionnelles et tridimensionnelles</b>	<b>7</b>
	<b>Introduction de la première partie</b>	<b>9</b>
<b>1</b>	<b>Domaine de résistance des milieux périodiques discrets - Application à des structures hexagonales quelconques de poutres</b>	<b>11</b>
1.1	The homogenization method for periodic discrete media . . . . .	13
1.1.1	Kinematic . . . . .	14
1.1.2	Static . . . . .	15
1.1.3	Duality . . . . .	17
1.1.4	Linear elasticity . . . . .	18
1.1.5	Strength domain . . . . .	19
1.1.6	Justification . . . . .	21
1.2	Homogenization of periodic hexagonal honeycombs with arbitrary non-uniform wall thickness . . . . .	23
1.2.1	Computation of $\Psi_*$ and $G$ for 2-D Euler-Bernoulli beams with arbitrary non-uniform thickness . . . . .	23
1.2.1.1	Computation of $\Psi_*$ . . . . .	25
1.2.1.2	Computation of $G$ . . . . .	25
1.2.2	The general case . . . . .	26
1.2.2.1	Determination of $\mathcal{SA}(\underline{\Sigma})$ . . . . .	27
1.2.2.2	Overall elastic constants . . . . .	29
1.2.2.3	Overall strength domain . . . . .	29
1.2.3	Application to regular hexagonal honeycombs with non-symmetric cell walls	30
1.2.3.1	Linear elasticity . . . . .	30
1.2.3.2	Overall strength domain . . . . .	32
1.2.4	Comparison with finite element computations . . . . .	36
1.2.4.1	Linear elasticity . . . . .	37
1.2.4.2	Strength domain . . . . .	38
1.2.4.3	Finite element modelling . . . . .	38
1.2.4.4	Results . . . . .	40

<b>2</b>	<b>Domaine de résistance de matériaux périodiques de cellule de base tridimensionnelle avec une distribution de matière non uniforme</b>	<b>45</b>
2.1	The static homogenization method for yield design of periodic discrete media . . .	47
2.2	Material symmetry . . . . .	49
2.3	Ultimate yield strength of non-uniform 3D beam . . . . .	50
2.3.1	General 3D Euler-Bernoulli beam model . . . . .	50
2.3.2	The non-symmetric material distribution . . . . .	52
2.4	Tetrakaidecahedral lattice . . . . .	53
2.4.1	Unit cell problem . . . . .	55
2.4.2	Regular non-symmetric cells . . . . .	57
2.4.3	Results . . . . .	57
	<b>Conclusion de la première partie</b>	<b>61</b>
<b>II</b>	<b>Etude expérimentale de la fissuration réfléctive (“reflective cracking”)</b>	<b>63</b>
	<b>Introduction de la deuxième partie</b>	<b>65</b>
<b>3</b>	<b>Le dimensionnement des chaussées neuves</b>	<b>67</b>
3.1	La chaussée, une structure multicouche . . . . .	67
3.1.1	La plate-forme support . . . . .	67
3.1.2	Les couches d’assises . . . . .	69
3.1.3	Les couches de surface . . . . .	71
3.2	Les différentes familles de structure . . . . .	72
3.2.1	Les chaussées souples . . . . .	72
3.2.2	Les chaussées bitumineuses épaisses . . . . .	73
3.2.3	Les chaussées à assises traitées aux liants hydrauliques . . . . .	73
3.2.4	Les chaussées à structure mixte . . . . .	73
3.2.5	Les chaussées à structure inverse . . . . .	73
3.2.6	Les chaussées en béton de ciment . . . . .	74
3.3	La méthode de dimensionnement des chaussées neuves en France . . . . .	74
3.3.1	Les données requises . . . . .	74
3.3.2	Les étapes du dimensionnement . . . . .	76
<b>4</b>	<b>La fissuration réfléctive ou “reflective cracking”</b>	<b>79</b>
4.1	Le vieillissement des structures de chaussées . . . . .	79
4.1.1	La qualité du réseau routier national . . . . .	79
4.1.2	Les problèmes liés au vieillissement des structures de chaussées . . . . .	80
4.1.2.1	Les dégradations révélant un défaut de surface . . . . .	80
4.1.2.2	Les dégradations révélant un défaut de structure . . . . .	80

4.1.3	La surveillance des dégradations . . . . .	81
4.2	La fissuration dans les chaussées . . . . .	81
4.2.1	Les différentes causes de fissuration . . . . .	82
4.2.2	Les différentes formes de fissuration . . . . .	82
4.2.3	La fissuration selon le type de chaussée . . . . .	83
4.2.3.1	Les fissurations affectant tous les types de chaussée . . . . .	83
4.2.3.2	Les fissurations typiques pour chaque type de chaussée . . . . .	84
4.3	Le phénomène de fissuration réflexive ou “reflective cracking” dans les chaussées semi-rigides . . . . .	86
4.3.1	Les modes de fissuration . . . . .	86
4.3.2	Contribution des différents chargements . . . . .	87
4.3.3	Schématisation du développement d’une fissure réflexive . . . . .	89
4.4	Les solutions actuelles pour ralentir la remontée des fissures . . . . .	91
4.4.1	Réduire la fissuration des matériaux traités aux liants hydrauliques . . . . .	91
4.4.2	Provoquer et localiser la fissuration . . . . .	92
4.4.3	Ralentir la remontée de la fissuration dans la couche supérieure . . . . .	94
4.4.3.1	La préparation des couches existantes . . . . .	94
4.4.3.2	Les systèmes retardateurs de fissuration . . . . .	94
4.4.3.3	Rôle d’une interface rigide . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Les essais de caractérisation des systèmes retardateurs de fissuration</b>	<b>101</b>
5.1	Classification des essais . . . . .	101
5.1.1	Les “essais matériaux” . . . . .	101
5.1.1.1	La caractérisation des matériaux bitumineux . . . . .	101
5.1.1.2	La caractérisation du produit d’interface . . . . .	103
5.1.2	Les “essais multicouches” . . . . .	103
5.1.2.1	La mesure de l’adhérence entre les couches . . . . .	104
5.1.2.2	La mesure de l’efficacité du système . . . . .	105
5.1.3	Les “essais structure” . . . . .	108
5.2	Campagne d’essais de retrait-flexion . . . . .	111
5.2.1	Principe de l’essai . . . . .	111
5.2.2	Description des systèmes testés . . . . .	111
5.2.3	Fabrication des éprouvettes . . . . .	115
5.2.4	Résultats . . . . .	116
5.2.4.1	Méthode d’exploitation . . . . .	116
5.2.4.2	Analyse des résultats - sable enrobé . . . . .	119
5.2.4.3	Analyse des résultats - grille en fibres de verre . . . . .	121
5.2.4.4	Analyse des résultats - Mesh Track . . . . .	123
5.2.4.5	Analyse des résultats - solution ARCELOR . . . . .	124

5.2.5	Conclusion des essais de retrait-flexion . . . . .	126
5.3	Campagne d'essais FABAC . . . . .	126
5.3.1	Géométrie des planches d'essai et instrumentation . . . . .	126
5.3.2	Premières conclusions des essais FABAC . . . . .	128
<b>6</b>	<b>Analyse d'une chaussée semi-rigide fissurée</b>	<b>133</b>
6.1	Analyse qualitative d'une chaussée semi-rigide fissurée . . . . .	133
6.1.1	Définition des hypothèses générales de la méthode expérimentale proposée .	133
6.1.2	Définition des fonctions caractérisant le fonctionnement d'une chaussée fissurée	135
6.1.3	Evolution des fonctions de référence en fonction du temps . . . . .	138
6.2	Analyse d'une chaussée fissurée à partir d'une modélisation multicouche . . . . .	142
6.2.1	Présentation de la structure étudiée . . . . .	142
6.2.1.1	Structure de chaussée . . . . .	143
6.2.1.2	Matériaux . . . . .	143
6.2.1.3	Chargement de trafic . . . . .	144
6.2.2	Présentation du modèle utilisé . . . . .	145
6.2.3	Résultats quantitatifs . . . . .	146
6.2.3.1	Résultats directs de la modélisation . . . . .	146
6.2.3.2	Calcul des grandeurs de référence . . . . .	148
<b>7</b>	<b>Conception de l'essai SIFIRE</b>	<b>157</b>
7.1	Définition de l'éprouvette . . . . .	157
7.1.1	Dimensions dans le plan . . . . .	157
7.1.2	Composition du multicouche . . . . .	158
7.2	Définition des paramètres de dimensionnement des dispositifs expérimentaux . . .	160
7.3	Calage des paramètres de l'essai . . . . .	163
7.3.1	Equilibre de l'éprouvette . . . . .	163
7.3.2	Prise en compte des contraintes technologiques . . . . .	166
7.3.3	Sensibilité des paramètres de chargement . . . . .	170
7.4	Validation par une modélisation aux éléments finis . . . . .	170
<b>8</b>	<b>Réalisation du bâti d'essai SIFIRE</b>	<b>177</b>
8.1	Mise au point du bâti d'essai . . . . .	178
8.1.1	Chargements verticaux . . . . .	178
8.1.2	Chargement horizontal . . . . .	180
8.1.3	Pilotage des vérins . . . . .	181
8.1.4	Métrologie . . . . .	181
8.2	Fabrication des éprouvettes . . . . .	185
8.2.1	Couche inférieure . . . . .	185
8.2.2	Couche intermédiaire . . . . .	185

---

8.2.3	Couche de roulement . . . . .	188
8.3	Situation actuelle de la campagne d'essais SIFIRE . . . . .	190
<b>Conclusion de la deuxième partie</b>		<b>193</b>
<b>A Dimensionnement de la poutre des bâtis d'essai TRAFIC et SIFIRE</b>		<b>213</b>
A.1	Détermination des efforts dimensionnants . . . . .	213
A.2	Vérification de la résistance mécanique . . . . .	216
A.3	Vérification de la résistance en fatigue . . . . .	217





## Première partie

# Modélisation du domaine de résistance de structures périodiques bidimensionnelles et tridimensionnelles



# Introduction de la première partie

Depuis quelques années, la sécurité des bâtiments et des infrastructures est devenue une préoccupation majeure des maîtres d'ouvrage. D'un point de vue structurel, de nombreuses recherches se développent pour mettre au point des produits performants pour absorber l'énergie de chocs ponctuels violents (explosions, accidents de la route par exemple), mais aussi pour dissiper l'énergie liée aux sollicitations sismiques. Par ailleurs, l'allègement des structures dans la construction est également un objectif souvent recherché pour permettre de plus longues portées, une liberté architecturale plus vaste et des réductions globales de coûts importantes.

Dans ce cadre, les matériaux alvéolaires, qu'ils soient bidimensionnels comme les nids d'abeilles ou tridimensionnels comme les mousses, présentent des caractéristiques intéressantes en termes d'allègement des structures et d'absorption d'énergie. Alors qu'ils sont déjà largement utilisés dans le domaine aéronautique et automobile, leurs applications dans la construction commencent à se développer.

Leur comportement est caractérisé par trois phases : une phase élastique linéaire jusqu'à une charge limite, suivie d'une phase dite de plateau assez étendue, et enfin une phase de densification conduisant à la ruine du matériau. La seconde phase caractérisée par la charge de plateau ou charge d'écoulement plastique, leur permet donc d'emmagasiner une quantité d'énergie importante et les rend performants pour les applications de type absorption d'énergie.

Cette seconde partie est consacrée à la modélisation de ces structures cellulaires grâce à des techniques d'homogénéisation des milieux périodiques. Nous proposons une méthode simple et rigoureuse qui permet de déterminer le domaine de résistance (charge plastique dans l'espace des sollicitations appliquées) d'un matériau cellulaire quelconque.

La modélisation micromécanique des mousses à porosité ouverte sous forme d'assemblages périodiques de poutres encastrées a été proposée pour la première fois par [Gent et Thomas, 1963]. Par la suite, de nombreux travaux ont porté sur ce domaine d'étude. Les approches micromécaniques proposées se différencient soit par la description géométrique de la cellule de base, soit par le comportement attribué aux poutres de la mousse. Dans leur livre, [Gibson et Ashby, 1997] reprennent les principales connaissances de la communauté scientifique sur ces matériaux, en considérant aussi bien les matériaux cellulaires industriels que naturels et en modélisant une large gamme de comportements.

En ce qui concerne la prédiction du domaine de résistance, [Klintworth et Stronge, 1988] ont obtenu les enveloppes de rupture de nids d'abeilles réguliers. [Gibson et al., 1989] ont également étudié la surface de rupture de nids d'abeilles pour un chargement biaxial mais aussi celle de mousses à porosité ouverte pour un chargement triaxial. Pour les mousses métalliques, les principaux modes de rupture considérés sont la plastification en flexion des rotules et le flambement élastique. Dans le cas de la rupture par plastification des rotules, la plupart de ces études est basée sur la théorie des poutres et sur le calcul d'une limite supérieure de la contrainte plastique qui correspond à la contrainte pour laquelle le travail du chargement appliqué est égal au travail plastique des rotules. Dans quelques cas, la limite inférieure qui correspond au début de la plastification des rotules, est égale à la limite supérieure. Cette valeur définit donc la contrainte

exacte de rupture plastique. Plus récemment, [Kim et Al-Hassani, 2002] ont introduit un mode de rupture supplémentaire qui correspond à la rupture axiale des poutres. Ils montrent que la surface de rupture du nid d'abeille anisotropique étudiée par [Gibson et Ashby, 1997] est en fait la limite supérieure de la surface exacte de rupture.

Toutefois, les démarches proposées présentent un caractère non systématique qui contraste avec la rigueur de l'homogénéisation des milieux périodiques. Aussi, nous proposons dans cette partie un modèle général d'homogénéisation de solides cellulaires périodiques ayant une géométrie et une topologie quelconque. Cette étude s'inscrit dans la continuité des travaux de [Sab, 1996], [Pradel et Sab, 1998], [Pradel, 1998] et [Laroussi et al., 2002]. Dans ces diverses publications, les auteurs ont proposé d'utiliser les outils rigoureux d'homogénéisation et de développements asymptotiques pour effectuer le passage d'un réseau périodique de particules ayant une cinématique de translation et de rotation, à un milieu continu équivalent. Ils se sont intéressés au comportement élastique des mousses et à la contribution du flambement élastique des parois à l'apparition de la phase de plateau. Nous proposons ici d'étendre cette méthode à l'analyse limite afin de déterminer le domaine de résistance d'une structure périodique quelconque.

Nous considérons ici les matériaux cellulaires comme des structures périodiques de poutres élasto-plastiques parfaites encastrées aux noeuds. La cellule de base du matériau est telle qu'elle permet de reproduire par périodicité le domaine complet. Le problème discret sur cette cellule admet un nombre fini de degrés de liberté et peut donc être résolu aisément. Les théorèmes d'homogénéisation permettent alors d'en déduire la réponse périodique de la structure infinie à une charge globale.

Cette seconde partie est composée de deux chapitres. Le premier présente d'une part la méthode d'homogénéisation proposée permettant de déterminer les caractéristiques élastiques et le domaine de résistance d'un matériau cellulaire quelconque.

D'autre part, ce modèle est appliqué à des réseaux bidimensionnels de type nids d'abeilles. Non seulement il permet de retrouver de manière simple les résultats relevés dans la littérature, mais il donne également la possibilité de calculer les domaines de résistance de matériaux pour lesquels la cellule de base est plus complexe. Nous illustrons cet avantage en modélisant un nid d'abeille régulier pour lequel la distribution de matière est non uniforme et non symétrique le long des parois reliant les noeuds. Nous obtenons ainsi de nouveaux résultats concernant l'influence de défauts de ce type sur le domaine de résistance des matériaux cellulaires bidimensionnels.

Le second chapitre traite de l'application du modèle général à des matériaux tridimensionnels. Nous avons choisi une géométrie de cellule de base de type tétrakaidécaèdre ou octogone tronqué. De la même manière que pour la structure bidimensionnelle, nous illustrons l'efficacité du modèle en étudiant l'effet de défauts de répartition de matière non symétrique le long des poutres sur la taille et la forme du domaine de résistance de la structure infinie.

# Chapitre 1

## Domaine de résistance des milieux périodiques discrets - Application à des structures hexagonales quelconques de poutres

Ce chapitre reprend l'intégralité d'un article soumis et écrit en collaboration avec Karam SAB.

Nous proposons de déterminer le domaine de résistance de milieux périodiques discrets grâce à un modèle analytique basé sur des techniques d'homogénéisation. Grâce à celles-ci, déterminer les caractéristiques globales élastiques et à la rupture de ces matériaux, revient à résoudre le problème auxiliaire sur une cellule de base (échelle micro), représentative du matériau complet (échelle macro). Cette approche d'homogénéisation a été précédemment présentée par [Sab, 1996], [Pradel et Sab, 1998], [Pradel, 1998] et [Laroussi et al., 2002], pour les structures élastiques, et est ici étendue à l'analyse limite de ces structures.

Dans la première section de ce chapitre nous explicitons le modèle analytique proposé pour un milieu périodique discret quelconque. Ce modèle est ensuite appliqué dans la seconde section à des cellules bidimensionnelles, et plus précisément aux nids d'abeilles. Il est validé d'une part en retrouvant de façon simple les résultats connus de la littérature, et d'autre part en obtenant une bonne concordance des résultats de calculs par éléments finis avec les prévisions du modèle analytique. Une étude de l'influence de défauts d'uniformité et de symétrie des parois de la cellule est également proposée. Il apparaît qu'une distribution non uniforme modifie la géométrie du domaine de résistance et que la non symétrie a une influence plus faible sur les caractéristiques de résistance.

## A rigorous homogenization method for the determination of the overall ultimate yield strength of periodic discrete media and an application to general hexagonal lattices of beams

Céline FLORENCE and Karam SAB<sup>1</sup>

*Institut Navier. LAMI - Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 6 et 8 avenue Blaise Pascal,  
Cité Descartes. Champs-sur-Marne. 77455 Marne-la-Vallée Cedex 2. France.*

A rigorous method for the homogenization of general elastoplastic periodic lattices is presented. A discrete unit cell problem with finite number of degrees of freedom is solved for the determination of the overall stiffness and the ultimate yield strength of the lattice. Both static and kinematic approaches are introduced. It is shown that the overall yield strength domain of a large specimen, subjected to the so-called kinematically uniform boundary conditions, is asymptotically equal to the homogenized yield strength domain, as the size of the specimen goes to infinity. The method is applied to metallic honeycomb materials with arbitrary non-uniform cell wall thickness. New results concerning non-symmetric material distribution in the cell edges of the honeycomb are obtained. The model shows that the effects of this type of defect on the overall properties are less important than the already known effects of symmetric non-uniform cell wall thickness. Good agreement is observed between the proposed analytical beam model predictions and the finite element computations.

**Key-words :** periodic lattices, plastic yield surface, homogenization, honeycomb materials.

## Introduction

Granular materials can be considered at the microscopic level as an assembly of interacting particles. Each particle is endowed with six degrees of freedom : three translations and three rotations. The interactions are governed by contact laws. Similarly, a honeycomb material can be seen as a lattice of beams which are rigidely connected in vertices. If the beams are loaded only at their ends, the elastic deformation can be completely determined in terms of translations and rotations of the vertices. In this case, the interactions between two particles depend on the geometry and the material properties of the beam connecting these particles.

The homogenization of elastic periodic discrete materials was previously investigated by [Sab, 1996], [Pradel et Sab, 1998] and [Pradel, 1998]. Asymptotic expansion methods and other related homogenization techniques were used to show that the overall elastic properties of the lattice can be derived by solving a discrete unit cell problem involving a finite number of degrees of freedom.

The present study is concerned with the determination of overall stiffness and ultimate yield strength of general elastoplastic periodic lattices. See [Salençon, 1990] for an introduction to the yield design theory. A discrete homogenization approach which extends to limit analysis the method which has been previously presented for elastic periodic lattices is proposed. Indeed, it will be shown that the determination of the ultimate yield strength of the lattice consists in solving

---

<sup>1</sup>corresponding author. E-mail : sab@lami.enpc.fr

a discrete yield design problem, involving a finite number of degrees of freedom, on the unit cell. The proposed method is also a generalization of the well-known homogenization method for the determination of the macroscopic strength domain of a continuum heterogeneous material. This approach was initially developed by [Suquet, 1983], [De Buhan, 1986] and [Bouchitté, 1987] for periodic media and by [Sab, 1994] for random media. One can find in [Bourada et Chateau, 1997] and [Chateau et al., 2002] a similar approach in the context of homogenization for granular materials.

In this paper, the method is applied to metallic honeycomb materials with arbitrary non-uniform cell wall thickness. Since the appearance of the pioneering work on the mechanics of cellular solids by [Gent et Thomas, 1963] as well as by [Patel et Finnie, 1970], much work has been performed for the appropriate modelling of effective elastic-perfectly plastic behavior of solid foams. Comprehensive treatises on elastic-perfectly plastic of solid foams are found in textbooks such as the well-known work by [Gibson et Ashby, 1997]. Using simple beam theory, [Klintworth et Stronge, 1988] proposed failure envelopes for regular honeycombs with respect to various elastic and plastic cell crushing modes. [Gibson et al., 1989] studied the biaxial yield surface of 2-dimensional honeycombs and the triaxial yield surface of 3-dimensional open-celled foams. In most of these studies, an upper bound on the plastic collapse stress is given by equating the work done by the applied stress to the plastic work done at the hinges corresponding to the considered collapse mode. In some cases, a lower bound identical to the upper bound is given, and thus define the exact plastic collapse stress. More recently, [Kim et Al-Hassani, 2002] introduced an additional collapse mode to those already proposed by [Gibson et Ashby, 1997] which corresponds to the axial yielding of the struts. They show that the overall plastic yield surface of the anisotropic honeycomb studied in [Gibson et Ashby, 1997] is actually an upper bound of the exact yield surface.

It will be shown in this paper that the overall yield surface of cellular materials seen as periodic lattices of elastic-perfectly plastic beams that are rigidly connected in vertices can be exactly determined by solving a discrete yield design problem attached to the unit cell. Indeed, the discrete problem involves a finite number of degrees of freedom because the periodic response of the infinite lattice to an overall loading is completely determined once the forces and moments at the ends of the beams are known.

The outline of the work is as follows : in section 2 a rigorous homogenization method for general periodic elastic-perfectly plastic discrete media is presented. Both static and kinematic methods are described and a homogenization result is established. In section 3, the proposed homogenization method is applied to general hexagonal lattices of beams. The strength domain of a two-dimensional Euler-Bernoulli beam with non-uniform thickness is identified. Then, the discrete unit cell problem is set and solved for the determination of the overall stiffness and strength properties of the lattice. In addition, the effect of non-symmetric material distribution in the cell edges of regular hexagonal honeycombs on their overall stiffness and strength properties is studied. A finite element validation of the proposed model is conducted. Based on standard continuum homogenization techniques, the overall properties of the already mentioned anisotropic honeycomb studied by [Gibson et Ashby, 1997] and [Kim et Al-Hassani, 2002] are numerically determined by solving unit cell problems. The computed properties are then compared to the predictions of the analytical model.

## 1.1 The homogenization method for periodic discrete media

The purpose of this section is to present a rigorous method in order to identify an overall elasto-plastic behaviour of general periodic lattices. The method is restricted to the determination of overall linear elasticity constants and overall ultimate failure envelopes. It is based on the resolution of unit cell problems involving a finite number of degrees of freedom. In the kinematic

approach, the unknowns are periodic displacements and rotations of the vertices (particles), while in the static approach the unknowns are periodic interaction forces and moments between the particles.

This section is organized as follows : firstly, the kinematic of an infinite lattice of interacting particles is described. Secondly, the static analysis is presented for pairwise interactions between particles. This situation corresponds to a granular material seen as a periodic assembly of rigid particles interacting at contact points. It also corresponds to an open-cell cellular material seen as a periodic lattice of elastic-perfectly plastic beams that are rigidly connected in vertices. The third subsection is dedicated to duality between kinematic and static approaches. Kinematic and static unit cell problems for the determination of the overall elasto-plastic behaviour are provided in the paragraphs 2.4 and 2.5. Finally, it is shown in the last subsection that the overall yield strength domain of a large specimen, subjected to the so-called kinematically uniform boundary conditions, is asymptotically equal to the homogenized yield strength domain, as the size of the specimen goes to infinity.

### 1.1.1 Kinematic

Consider a body consisting of a periodic lattice of interacting particles. Particles  $P^{\alpha,i}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Z}^3$ ,  $i = 1, \dots, n$ , of the so-called *n-type* lattice are generated by periodicity with  $n$  particles as follows :

$$\forall i = 1, \dots, n, \forall \alpha \in \mathbb{Z}^3, \underline{X}^{\alpha,i} = \underline{X}^{0,i} + \alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \alpha_3 \underline{a}_3$$

where  $\underline{X}^{\alpha,i}$  is the coordinates vector of  $P^{\alpha,i}$  in the reference configuration, and  $\underline{a}_1$ ,  $\underline{a}_2$  and  $\underline{a}_3$  are three vectors forming a base in the 3-dimensional Euclidean space. Let  $|Y| = |\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)|$  denotes the volume of the parallelepipedic cell constructed from this base, and  $\mathcal{P}$  denotes the set of all particles of the lattice. It is assumed that for every particle  $P \in \mathcal{P}$  there is a unique couple of  $\alpha \in \mathbb{Z}^3$  and  $i = 1, \dots, n$  such that  $P = P^{\alpha,i}$ .

In the small strain regime, each particle  $P^{\alpha,i}$  is endowed with a translation vector,  $\underline{u}^{\alpha,i}$ , and a rotation vector,  $\underline{\varphi}^{\alpha,i}$ . The discrete deformation field is noted as follows :

$$(\underline{U}, \underline{\Phi}) = \{(\underline{u}^{\alpha,i}, \underline{\varphi}^{\alpha,i}), i = 1, \dots, n, \alpha \in \mathbb{Z}^3\}$$

For the structural analysis, the body has to be replaced by a similar body with the same shape consisting of a homogeneous continuum "effective" material with unknown properties. The task of the homogenization analysis is to determine the properties of the effective material. Let  $\underline{E}$  be the overall symmetric second order strain tensor applied to the infinite lattice. The set of the kinematically admissible deformation fields associated to  $\underline{E}$  is :

$$\mathcal{KA}(\underline{E}) = \{(\underline{U}, \underline{\Phi}), \underline{u}^{\alpha,i} = \underline{E} \cdot \underline{X}^{\alpha,i} + \underline{u}^{per,i}, \underline{\varphi}^{\alpha,i} = \underline{\varphi}^{per,i}, i = 1, \dots, n, \alpha \in \mathbb{Z}^3\} \quad (1.1)$$

For  $\underline{E} = 0$ ,  $\mathcal{KA}(0)$  is the space of periodic deformation fields. Periodic means that particles of the same *type* have the same motion. According to (1.1), a kinematically admissible deformation field associated to  $\underline{E}$  is obtained by superposing the linear homogeneous field  $(\underline{U}^E, \underline{\Phi}^E) \equiv (\underline{u}^{\alpha,i} = \underline{E} \cdot \underline{X}^{\alpha,i}, \underline{\varphi}^{\alpha,i} = 0)$  to the periodic deformation field  $(\underline{U}^{per}, \underline{\Phi}^{per}) \equiv (\underline{u}^{\alpha,i} = \underline{u}^{per,i}, \underline{\varphi}^{\alpha,i} = \underline{\varphi}^{per,i})$ . The set of all kinematically admissible deformation fields is :

$$\mathcal{KA} = \bigcup_{\underline{E}} \mathcal{KA}(\underline{E}) \quad (1.2)$$



### 1.1.2 Static

In this paper, the analysis is restricted to interactions between couples of particles. Indeed, cellular materials seen as periodic lattices of beams that are rigidly connected in vertices will be considered in the following sections. For these materials, particles are vertices of the lattice and interacting particles are couples of vertices which are connected by a beam element. Fig. 1.1(a). It will be shown in section 3 how the overall mechanical behaviour of these materials can be determined in terms of the constitutive laws that govern the interactions between connected particles.

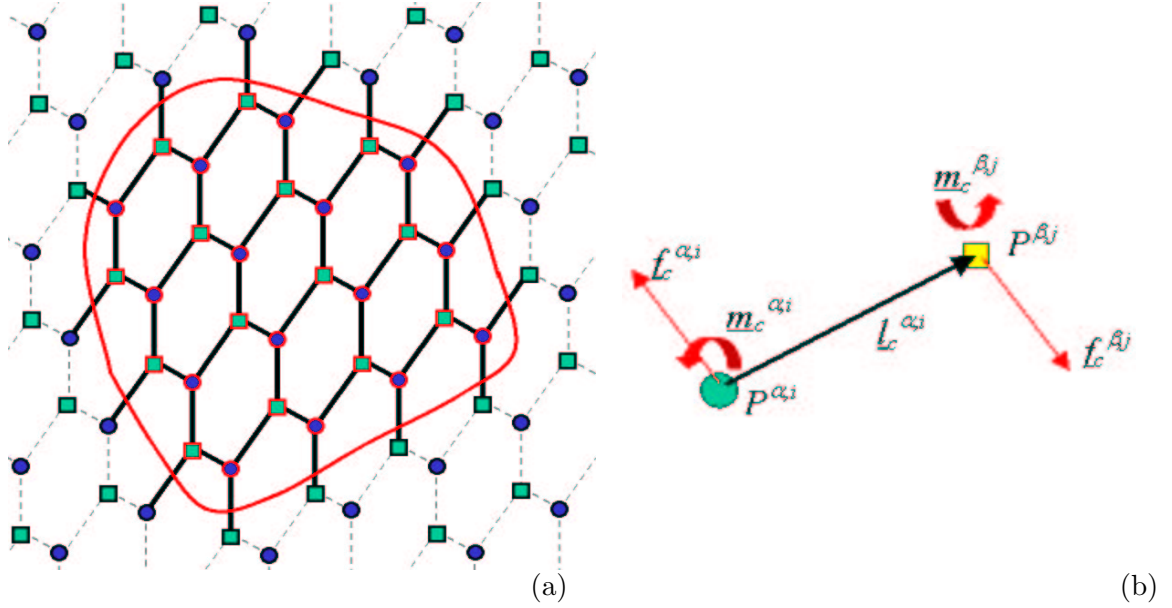


FIGURE 1.1. A periodic lattice of interacting particles (a) A 2 – type hexagonal lattice and (b) Interaction forces and moments

So, let  $c = \{P^{\beta,j}, P^{\alpha,i}\}$  be an interacting couple of particles :  $\underline{f}_c^{\alpha,i}$  (resp.  $\underline{f}_c^{\beta,j}$ ) is the force exerted by particle  $P^{\beta,j}$  (resp.  $P^{\alpha,i}$ ) on particle  $P^{\alpha,i}$  (resp.  $P^{\beta,j}$ ), and  $\underline{m}_c^{\alpha,i}$  (resp.  $\underline{m}_c^{\beta,j}$ ) is the moment at point  $\underline{X}^{\alpha,i}$  (resp.  $\underline{X}^{\beta,j}$ ) exerted by particle  $P^{\beta,j}$  (resp.  $P^{\alpha,i}$ ) on particle  $P^{\alpha,i}$  (resp.  $P^{\beta,j}$ ). Fig. 1.1(b). The set of interaction forces and moments of the couple  $c$ , noted

$$I_c = \left\{ \underline{f}_c^{\beta,j}, \underline{m}_c^{\beta,j}, \underline{f}_c^{\alpha,i}, \underline{m}_c^{\alpha,i} \right\}$$

is self-balanced :

$$\underline{f}_c^{\alpha,i} + \underline{f}_c^{\beta,j} = 0 \quad \text{and} \quad \underline{m}_c^{\alpha,i} + \underline{m}_c^{\beta,j} - \underline{f}_c^{\alpha,i} \wedge \underline{l}_c^{\alpha,i} = 0 \quad (1.3)$$

where

$$\underline{l}_c^{\alpha,i} = \underline{X}^{\beta,j} - \underline{X}^{\alpha,i} \quad \text{and} \quad \underline{l}_c^{\beta,j} = \underline{X}^{\alpha,i} - \underline{X}^{\beta,j} = -\underline{l}_c^{\alpha,i}$$

The internal work done by  $I_c$  is :

$$w_c = \underline{f}_c^{\alpha,i} \cdot \underline{u}^{\alpha,i} + \underline{m}_c^{\alpha,i} \cdot \underline{\varphi}^{\alpha,i} + \underline{f}_c^{\beta,j} \cdot \underline{u}^{\beta,j} + \underline{m}_c^{\beta,j} \cdot \underline{\varphi}^{\beta,j} \quad (1.4)$$

Introducing the generalized strains  $(\underline{d}_c^{\alpha,i}, \underline{\delta}_c^{\alpha,i})$  and  $(\underline{d}_c^{\beta,j}, \underline{\delta}_c^{\beta,j})$  with

$$\underline{d}_c^{\alpha,i} = \underline{u}^{\beta,j} - \underline{u}^{\alpha,i} - \underline{l}_c^{\alpha,i} \wedge \frac{\underline{\varphi}^{\alpha,i} + \underline{\varphi}^{\beta,j}}{2}, \quad \underline{\delta}_c^{\alpha,i} = \underline{\varphi}^{\beta,j} - \underline{\varphi}^{\alpha,i}$$

and

$$\underline{d}_c^{\beta,j} = \underline{u}^{\alpha,i} - \underline{u}^{\beta,j} - \underline{l}_c^{\beta,j} \wedge \frac{\underline{\varphi}^{\alpha,i} + \underline{\varphi}^{\beta,j}}{2} = -\underline{d}_c^{\alpha,i}, \quad \underline{\delta}_c^{\beta,j} = \underline{\varphi}^{\alpha,i} - \underline{\varphi}^{\beta,j} = -\underline{\delta}_c^{\alpha,i}$$

and using equation (1.3), it is found that :

$$w_c = - \left( \underline{f}_c^{\alpha,i} \cdot \underline{d}_c^{\alpha,i} + \widehat{\underline{m}}_c^{\alpha,i} \cdot \underline{\delta}_c^{\alpha,i} \right) = - \left( \underline{f}_c^{\beta,j} \cdot \underline{d}_c^{\beta,j} + \widehat{\underline{m}}_c^{\beta,j} \cdot \underline{\delta}_c^{\beta,j} \right) = - \left( \underline{f}_c \cdot \underline{d}_c + \widehat{\underline{m}}_c \cdot \underline{\delta}_c \right) \quad (1.5)$$

where  $\widehat{\underline{m}}_c^{\alpha,i}$  (resp.  $\widehat{\underline{m}}_c^{\beta,j}$ ) is the moment at the mid-point of  $P^{\alpha,i}$  and  $P^{\beta,j}$  which is exerted by particle  $P^{\beta,j}$  (resp.  $P^{\alpha,i}$ ) on particle  $P^{\alpha,i}$  (resp.  $P^{\beta,j}$ ) :

$$\widehat{\underline{m}}_c^{\alpha,i} = \underline{m}_c^{\alpha,i} - \frac{1}{2} \underline{f}_c^{\alpha,i} \wedge \underline{l}_c^{\alpha,i} \quad \text{and} \quad \widehat{\underline{m}}_c^{\beta,j} = \underline{m}_c^{\beta,j} - \frac{1}{2} \underline{f}_c^{\beta,j} \wedge \underline{l}_c^{\beta,j} = -\widehat{\underline{m}}_c^{\alpha,i}$$

Depending on the orientation of the couple  $c$ , which must be fixed once for all, the branch vector  $\underline{l}_c$  and the generalized stress  $(\underline{f}_c, \widehat{\underline{m}}_c)$  and strain  $(\underline{d}_c, \underline{\delta}_c)$  associated to  $c$  can be equivalently defined as follows :

$$\left\{ \underline{l}_c^{\alpha,i} = \underline{l}_c, \left( \frac{\underline{f}_c^{\alpha,i}}{\widehat{\underline{m}}_c^{\alpha,i}} = \frac{\underline{f}_c}{\widehat{\underline{m}}_c} \right), \left( \frac{\underline{d}_c^{\alpha,i}}{\underline{\delta}_c^{\alpha,i}} = \frac{\underline{d}_c}{\underline{\delta}_c} \right) \right\} \quad \text{or} \quad \left\{ \underline{l}_c^{\beta,j} = \underline{l}_c, \left( \frac{\underline{f}_c^{\beta,j}}{\widehat{\underline{m}}_c^{\beta,j}} = \frac{\underline{f}_c}{\widehat{\underline{m}}_c} \right), \left( \frac{\underline{d}_c^{\beta,j}}{\underline{\delta}_c^{\beta,j}} = \frac{\underline{d}_c}{\underline{\delta}_c} \right) \right\}$$

It will be assumed in the sequel that  $\mathcal{C}$ , the set of interacting couples of particles, is generated by periodicity with a minimal set of  $r$  couples noted  $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ . More precisely, for  $\gamma \in \mathbb{Z}^3$  and  $c = \{P^{\beta,j}, P^{\alpha,i}\}$ , let  $c^\gamma = \{P^{\beta+\gamma,j}, P^{\alpha+\gamma,i}\}$  denote the interacting couple of particles obtained by  $\gamma$ -translation of  $c$ . Then,

$$\mathcal{C} = \{c_k^\gamma, k = 1, \dots, r, \gamma \in \mathbb{Z}^3\}$$

The set  $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$  that generates  $\mathcal{C}$  is minimal in the sense that  $c_k$  in  $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$  cannot be obtained by translating another  $c_l$  in  $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$  :

$$c_k \neq c_l^\gamma \text{ for all } l \neq k \text{ and all } \gamma \in \mathbb{Z}^3$$

In the absence of external forces and moments, the balance equation at particle  $P^{\alpha,i}$  reads :

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} \underline{f}_c^{\alpha,i} = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{c \in \mathcal{C}} \underline{m}_c^{\alpha,i} = 0 \quad (1.6)$$

In the above summations,  $\underline{f}_c^{\alpha,i}$  and  $\underline{m}_c^{\alpha,i}$  are zero if particle  $P^{\alpha,i}$  is not one of the two particles of  $c$ .

The interaction forces and moments in the infinite lattice are periodic if

$$I_{c_k^\gamma} = I_{c_k} \text{ for all } k \text{ and all } \gamma \quad (1.7)$$

In this case, the balance equations at particles  $P^{\alpha,i}$  and  $P^{\mathbf{0},i}$  are the same. Therefore, there are at most  $6 \times n$  independent balance equations for the whole lattice.

Let  $\underline{\underline{\Sigma}}$  be the overall symmetric second order stress tensor applied to the infinite lattice. The set of statically admissible periodic interactions forces and moments associated to  $\underline{\underline{\Sigma}}$  is introduced :

$$\mathcal{SA}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \left\{ (I_c)_{c \in \mathcal{C}} / (1.6), (1.7) \text{ and } \underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{|Y|} \sum_{k=1, \dots, r} \underline{f}_{c_k} \otimes^s \underline{l}_{c_k} \right\} \quad (1.8)$$

where  $(\underline{a} \otimes^s \underline{b})_{ij} = \frac{1}{2} (a_i b_j + a_j b_i)$  is the symmetric part of the dyadic product of  $\underline{a}$  and  $\underline{b}$ .

For every  $\underline{\underline{\Sigma}}$ , it is assumed that  $\mathcal{SA}(\underline{\underline{\Sigma}})$  is not empty . The set of all statically admissible periodic interactions of the infinite lattice is defined by :

$$\mathcal{SA} = \{ (I_c)_{c \in \mathcal{C}} / (1.6), (1.7) \} = \bigcup_{\underline{\underline{\Sigma}}} \mathcal{SA}(\underline{\underline{\Sigma}}) \quad (1.9)$$

### 1.1.3 Duality

It is clear that the generalized discrete strain field associated to a deformation field in  $\mathcal{KA}(\underline{E})$  is periodic :

$$(\underline{U}, \underline{\Phi}) \in \mathcal{KA}(\underline{E}) \Rightarrow \underline{d}_{c_k}^\gamma = \underline{d}_{c_k}, \quad \underline{\delta}_{c_k}^\gamma = \underline{\delta}_{c_k} \text{ for all } k \text{ and all } \gamma$$

Using periodicity and equations (1.4-1.5), it can be shown that the following equation holds for all periodic deformations in  $\mathcal{KA}(0)$  and all periodic interaction forces and moments :

$$\sum_{k=1, \dots, r} \underline{f}_{c_k} \cdot \underline{d}_{c_k} + \widehat{\underline{m}}_{c_k} \cdot \underline{\delta}_{c_k} = - \sum_{i=1, \dots, n} \left( \underline{u}^{per, i} \cdot \sum_{c \in \mathcal{C}} \underline{f}_c^{0, i} + \underline{\varphi}^{per, i} \cdot \sum_{c \in \mathcal{C}} \underline{m}_c^{0, i} \right)$$

Therefore, the periodic  $(I_c)_{c \in \mathcal{C}}$  is in  $\mathcal{SA}$  if, and only if,

$$\sum_{k=1, \dots, r} \underline{f}_{c_k} \cdot \underline{d}_{c_k} + \widehat{\underline{m}}_{c_k} \cdot \underline{\delta}_{c_k} = 0 \quad (1.10)$$

holds for all periodic deformations in  $\mathcal{KA}(0)$ . This orthogonality property can be written as follows :

$$\mathcal{SA} = \mathcal{KA}(0)^\perp \quad (1.11)$$

Hence,

$$\mathcal{SA}^\perp = \mathcal{KA}(0) \quad (1.12)$$

The last equation means that if the  $r$  couples  $(\underline{d}_{c_k}, \underline{\delta}_{c_k})_{k=1, \dots, r}$  are such that (1.10) holds for all  $(I_c)_{c \in \mathcal{C}} \in \mathcal{SA}$ , then they are generalized strains which derive from a periodic deformation field.

Moreover, from the above orthogonality properties and from the definitions of  $\mathcal{SA}(\underline{\underline{\Sigma}})$  and  $\mathcal{KA}(\underline{E})$ , these sets are in duality in the following sense :

$$(I_c)_{c \in \mathcal{C}} \in \mathcal{SA}(\underline{\underline{\Sigma}}), \quad (\underline{U}, \underline{\Phi}) \in \mathcal{KA}(\underline{E}) \Rightarrow \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{E} = \frac{1}{|Y|} \sum_{k=1, \dots, r} \underline{f}_{c_k} \cdot \underline{d}_{c_k} + \widehat{\underline{m}}_{c_k} \cdot \underline{\delta}_{c_k} \quad (1.13)$$

Indeed, a kinematically admissible deformation in  $\mathcal{KA}(\underline{E})$  is the superposition of a periodic deformation and deformation  $(\underline{u}^{\alpha, i} = \underline{E} \cdot \underline{X}^{\alpha, i}, \underline{\varphi}^{\alpha, i} = 0)$  to which the generalized strain  $(\underline{d}_{c_k}, \underline{\delta}_{c_k}) = (\underline{E} \cdot \underline{l}_{c_k}, 0)$  is associated.

#### 1.1.4 Linear elasticity

In this subsection the homogenization method for the determination of the overall effective linear elastic behaviour of the lattice is presented. The kinematic method was presented previously by one of the authors and his co-worker [Sab, 1996], [Pradel et Sab, 1998] and [Pradel, 1998]. To our knowledge, the static approach is firstly introduced in the present paper.

The orientations of all interacting couples being fixed once for all, the linear elastic constitutive law is introduced by means of a quadratic strain energy  $\Psi^c$  in  $(\underline{d}_c, \underline{\delta}_c)$ , for every  $c$  in  $\mathcal{C}$  :

$$\Psi^c(\underline{d}_c, \underline{\delta}_c) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \underline{d}_c \\ \underline{\delta}_c \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{K}}^c \cdot \begin{pmatrix} \underline{d}_c \\ \underline{\delta}_c \end{pmatrix}$$

where  $\underline{\underline{K}}^c$  is a 6x6 positive symmetric matrix. The generalized stress  $\begin{pmatrix} \underline{f}_c \\ \underline{\widehat{m}}_c \end{pmatrix}$  is derived by :

$$\begin{pmatrix} \underline{f}_c \\ \underline{\widehat{m}}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi^c}{\partial \underline{d}_c} \\ \frac{\partial \Psi^c}{\partial \underline{\delta}_c} \end{pmatrix} = \underline{\underline{K}}^c \cdot \begin{pmatrix} \underline{d}_c \\ \underline{\delta}_c \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Let  $\mathcal{K}$  denote the application which associates  $\underline{\underline{K}}^c$  to every oriented couple  $c$  in  $\mathcal{C}$ . Assuming the periodicity of this application,

$$\underline{\underline{K}}^{c_k} = \underline{\underline{K}}^{c_k}, \text{ for all } k \text{ and all } \gamma$$

[Sab, 1996], [Pradel et Sab, 1998] and [Pradel, 1998] showed that, in the structural analysis, it is possible to replace the periodic lattice by an homogeneous continuum "effective" material. The overall elastic strain energy of the effective material is given by the following kinematic definition :

$$\frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{A}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}} \equiv \Psi^{\text{hom}}(\underline{\underline{E}}) = \underset{(\underline{U}, \underline{\Phi}) \in \mathcal{KA}(\underline{\underline{E}})}{\text{Min}} \Psi^{\text{Tot}}(\underline{U}, \underline{\Phi}) \equiv \frac{1}{|Y|} \sum_{k=1, \dots, r} \Psi^{c_k}(\underline{d}_{c_k}, \underline{\delta}_{c_k}) \quad (1.15)$$

where  $\underline{\underline{A}}^{\text{hom}}$  is the overall elasticity tensor.

For fixed  $\underline{\underline{E}}$ , the minimization problem in (1.15) involves function  $\Psi^{\text{Tot}}$  which is quadratic in  $(\underline{u}^{\text{per}, i}, \underline{\varphi}^{\text{per}, i})$ . Differentiating  $\Psi^{\text{Tot}}$  with respect to  $(\underline{u}^{\text{per}, i}, \underline{\varphi}^{\text{per}, i})$ , and using constitutive law (1.14) and orthogonality condition (1.11), an equivalent definition of  $\underline{\underline{A}}^{\text{hom}}$  is derived :

$$(\underline{U}, \underline{\Phi}) \in \mathcal{KA}(\underline{\underline{E}}), (I_c)_{c \in \mathcal{C}} \in \mathcal{SA}(\underline{\underline{\Sigma}}), \begin{pmatrix} \underline{f}_{c_k} \\ \underline{\widehat{m}}_{c_k} \end{pmatrix} = \underline{\underline{K}}^{c_k} \cdot \begin{pmatrix} \underline{d}_{c_k} \\ \underline{\delta}_{c_k} \end{pmatrix} \text{ for all } k, \underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{A}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{E}}$$

Introducing the conjugate functions of  $\Psi^c$  and  $\Psi^{\text{hom}}$ ,

$$\Psi_*^c(\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c) = \underset{(\underline{d}_c, \underline{\delta}_c) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3}{\text{Sup}} \underline{f}_c \cdot \underline{d}_c + \underline{\widehat{m}}_c \cdot \underline{\delta}_c - \Psi^c(\underline{d}_c, \underline{\delta}_c)$$

$$\Psi_*^{\text{hom}}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \underset{\underline{\underline{E}}}{\text{Sup}} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} - \Psi^{\text{hom}}(\underline{\underline{E}})$$

using standard convex analysis (see [Ekeland et Temam, 1976], for instance) as well as the orthogonality properties (1.11-1.12), the following static equivalent definition can be established :

$$\Psi_*^{\text{hom}}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \underset{(I_c)_{c \in \mathcal{C}} \in \mathcal{SA}(\underline{\underline{\Sigma}})}{\text{Min}} \frac{1}{|Y|} \sum_{k=1, \dots, r} \Psi_*^{c_k}(\underline{f}_{c_k}, \underline{\widehat{m}}_{c_k}) \quad (1.16)$$

For strictly positive  $\underline{\underline{K}}^c$ ,  $\Psi_*^c$  is given by :

$$\Psi_*^c \left( \underline{\underline{f}}_c, \underline{\underline{m}}_c \right) = \frac{1}{2} {}^t \begin{pmatrix} \underline{\underline{f}}_c \\ \underline{\underline{m}}_c \end{pmatrix} \cdot (\underline{\underline{K}}^c)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\underline{f}}_c \\ \underline{\underline{m}}_c \end{pmatrix}$$

Finally, for strictly positive  $\underline{\underline{A}}^{\text{hom}}$ ,  $\Psi_*^{\text{hom}}$  is given by :

$$\Psi_*^{\text{hom}} (\underline{\underline{\Sigma}}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{S}}^{\text{hom}} : \underline{\underline{\Sigma}} \text{ with } \underline{\underline{S}}^{\text{hom}} = \left( \underline{\underline{A}}^{\text{hom}} \right)^{-1} \quad (1.17)$$

### 1.1.5 Strength domain

In this paragraph, the method previously presented for elastic periodic lattices is extended to limit analysis. The homogenization method for the determination of the overall ultimate yield strength, initially developped by [Suquet, 1983], [De Buhan, 1986], [Bouchitté, 1987] for periodic continuum media and by [Sab, 1994] for random continuum media, is generalized to periodic lattices of interacting particles.

The orientations of all interacting couples being fixed once for all, and at every interacting couple of particles  $c$  in  $\mathcal{C}$ , the closed nonempty convex domain of  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $G^c$ , characterizing the strength capacities of this couple, is introduced :

$$\left( \underline{\underline{f}}_c, \underline{\underline{m}}_c \right) \in G^c$$

Assuming periodicity condition

$$G^{c_k} = G^{c_k} \text{ for all } k \text{ and all } \gamma$$

one may define the macroscopic strength domain, denoted by  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$ , as the set of macroscopic stress states  $\underline{\underline{\Sigma}}$  such that there is a periodic distribution of interaction forces and moments in  $\mathcal{SA}(\underline{\underline{\Sigma}})$  with  $\left( \underline{\underline{f}}_{c_k}, \underline{\underline{m}}_{c_k} \right)$  in  $G^{c_k}$ , for all  $k$  :

$$\mathcal{G}^{\text{hom}} = \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} / \exists (I_c)_{c \in \mathcal{C}} \in \mathcal{SA}(\underline{\underline{\Sigma}}), \left( \underline{\underline{f}}_{c_k}, \underline{\underline{m}}_{c_k} \right) \in G^{c_k} \text{ for all } k \right\} \quad (1.18)$$

From this definition, it can be easily checked that  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$  is a closed convex domain which is assumed to be nonempty.

A kinematic definition of  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$  can be obtained through the dualization of the above static definition. The support functions of the convex domains  $G^c$  and  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$  are respectively introduced :

$$\pi^c (\underline{\underline{d}}_c, \underline{\underline{\delta}}_c) = \sup_{(\underline{\underline{f}}_c, \underline{\underline{m}}_c) \in G^c} \underline{\underline{f}}_c \cdot \underline{\underline{d}}_c + \underline{\underline{m}}_c \cdot \underline{\underline{\delta}}_c \quad (1.19)$$

$$\Pi^{\text{hom}} (\underline{\underline{E}}) = \sup_{\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathcal{G}^{\text{hom}}} \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} \quad (1.20)$$

Actually, because they are convex and closed,  $G^c$  and  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$  are completely characterized by the positively homogeneous convex functions  $\pi^c$  and  $\Pi^{\text{hom}}$ , respectively. See [Ekeland et Temam, 1976].

$$\left( \underline{\underline{f}}_c, \underline{\underline{m}}_c \right) \in G^c \Leftrightarrow \underline{\underline{f}}_c \cdot \underline{\underline{d}}_c + \underline{\underline{m}}_c \cdot \underline{\underline{\delta}}_c \leq \pi^c (\underline{\underline{d}}_c, \underline{\underline{\delta}}_c), \forall (\underline{\underline{d}}_c, \underline{\underline{\delta}}_c) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad (1.21)$$

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathcal{G}^{\text{hom}} \Leftrightarrow \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{E}} \leq \Pi^{\text{hom}} (\underline{\underline{E}}), \forall \underline{\underline{E}} \in \mathbb{R}^6 \quad (1.22)$$

Moreover,  $\pi^c$  and  $\Pi^{\text{hom}}$  are the only positively homogeneous convex functions such that (1.21) and (1.22) are respectively true. For any  $(\underline{U}, \underline{\Phi}) \in \mathcal{KA}$ , the following positively homogeneous convex function is introduced :

$$\Pi^{\text{Tot}}(\underline{U}, \underline{\Phi}) \equiv \frac{1}{|Y|} \sum_{k=1, \dots, r} \pi^{c_k}(\underline{d}_{c_k}, \underline{\delta}_{c_k}) \quad (1.23)$$

It will be shown, in the sequel, that if there is an open set in  $\mathcal{KA}$  such that  $\Pi^{\text{Tot}}(\underline{U}, \underline{\Phi}) < +\infty$ , then  $\Pi^{\text{hom}}(\underline{E})$  is equal to the infimum of  $\Pi^{\text{Tot}}(\underline{U}, \underline{\Phi})$  over  $\mathcal{KA}(\underline{E})$  :

$$\Pi^{\text{hom}}(\underline{E}) = \inf_{(\underline{U}, \underline{\Phi}) \in \mathcal{KA}(\underline{E})} \Pi^{\text{Tot}}(\underline{U}, \underline{\Phi}) \quad (1.24)$$

Indeed, (1.22) can be equivalently stated as follows :

$$\mathcal{G}^{\text{hom}} \text{ is the set of } \underline{\Sigma} \text{ such that } \inf_{\underline{E}} \left( \Pi^{\text{hom}}(\underline{E}) - \underline{\Sigma} : \underline{E} \right) \text{ is reached at } \underline{E} = 0$$

Moreover,

$$\inf_{(\underline{U}, \underline{\Phi}) \in \mathcal{KA}} \left( \Pi^{\text{Tot}}(\underline{U}, \underline{\Phi}) - \underline{\Sigma} : \underline{E} \right) = \inf_{\underline{E}} \left( \left( \inf_{(\underline{U}, \underline{\Phi}) \in \mathcal{KA}(\underline{E})} \Pi^{\text{Tot}}(\underline{U}, \underline{\Phi}) \right) - \underline{\Sigma} : \underline{E} \right)$$

and,

$$\underline{E} \longmapsto \inf_{(\underline{U}, \underline{\Phi}) \in \mathcal{KA}(\underline{E})} \Pi^{\text{Tot}}(\underline{U}, \underline{\Phi})$$

is positively homogeneous and convex <sup>2</sup>.

Therefore, (1.24) is equivalent to the following statement :

$$\mathcal{G}^{\text{hom}} \text{ is the set of } \underline{\Sigma} \text{ such that } \inf_{(\underline{U}, \underline{\Phi}) \in \mathcal{KA}} \left( \Pi^{\text{Tot}}(\underline{U}, \underline{\Phi}) - \underline{\Sigma} : \underline{E} \right) \text{ is reached at } (\underline{U}, \underline{\Phi}) = (0, 0)$$

The infimum over  $\mathcal{KA}$  of the convex function  $(\Pi^{\text{Tot}}(\underline{U}, \underline{\Phi}) - \underline{\Sigma} : \underline{E})$  is reached when its variation is null :

$$\Delta(\Pi^{\text{Tot}}(\underline{U}, \underline{\Phi}) - \underline{\Sigma} : \underline{E}) = \frac{1}{|Y|} \sum_{k=1, \dots, r} \left( \frac{\partial \pi^{c_k}}{\partial \underline{d}_{c_k}} \cdot \Delta \underline{d}_{c_k} + \frac{\partial \pi^{c_k}}{\partial \underline{\delta}_{c_k}} \cdot \Delta \underline{\delta}_{c_k} \right) - \underline{\Sigma} : \Delta \underline{E} = 0 \quad (1.25)$$

for all the variations  $(\Delta \underline{u}^{\text{per}, i}, \Delta \underline{\varphi}^{\text{per}, i}, \Delta \underline{E})$  of  $(\underline{u}^{\text{per}, i}, \underline{\varphi}^{\text{per}, i}, \underline{E})$

Here  $\Delta \underline{d}_{c_k} = \Delta \underline{E} \cdot \underline{l}_{c_k} + \Delta \underline{d}_{c_k}^{\text{per}}$  and  $\Delta \underline{\delta}_{c_k} = \Delta \underline{\delta}_{c_k}^{\text{per}}$ , where  $\Delta \underline{d}_{c_k}^{\text{per}} = \Delta \underline{u}^{\text{per}, j} - \Delta \underline{u}^{\text{per}, i} - \underline{l}_{c_k} \wedge \frac{\Delta \underline{\varphi}^{\text{per}, j} + \Delta \underline{\varphi}^{\text{per}, i}}{2}$  and  $\Delta \underline{\delta}_{c_k}^{\text{per}} = \Delta \underline{\varphi}^{\text{per}, j} - \Delta \underline{\varphi}^{\text{per}, i}$ .

Actually, the function  $\Pi^{\text{Tot}}(\underline{U}, \underline{\Phi})$  is not differentiable at  $(\underline{U}, \underline{\Phi}) = (0, 0)$ . Thereby, (1.25) should be understood in the sense of the subdifferential calculus. Firstly, note that  $\pi^c(0, 0) = 0$  and  $\Pi^{\text{hom}}(0) = 0$ , because  $G^c$  and  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$  are assumed to be nonempty. Secondly, from the definition of the subdifferential of a convex function [Ekeland et Temam, 1976], and from (1.21-1.22), it can be seen that  $G^c = \partial \pi^c$  at  $(\underline{d}_c, \underline{\delta}_c) = (0, 0)$ , and,  $\mathcal{G}^{\text{hom}} = \partial \Pi^{\text{hom}}$  at  $\underline{E} = 0$ .

---

<sup>2</sup>because  $\Pi^{\text{Tot}}$  is positively homogeneous and convex and its infimum over  $\mathcal{KA}(\underline{E})$  is reached at  $(\underline{U}, \underline{\Phi}) \in \mathcal{KA}(\underline{E})$  for every  $\underline{E}$

Moreover, in order to ensure that  $\partial \left( \sum_{k=1, \dots, r} \pi^{c_k} (\underline{d}_{c_k}, \underline{\delta}_{c_k}) \right) = \sum_{k=1, \dots, r} \partial \pi^{c_k} (\underline{d}_{c_k}, \underline{\delta}_{c_k})$ , it is assumed that there is an open set in  $\mathcal{KA}$  such that  $\Pi^{\text{Tot}}(\underline{U}, \underline{\Phi}) < +\infty$  (see [Ekeland et Temam, 1976]). For instance, when all  $G^{c_k}$  are bounded,  $\Pi^{\text{Tot}}(\underline{U}, \underline{\Phi})$  is finite for all  $(\underline{U}, \underline{\Phi})$  in  $\mathcal{KA}$ .

With this assumption, (1.25) becomes :

$$\begin{aligned} & \text{There is a periodic } (I_c)_{c \in \mathcal{C}}, \text{ such that} \\ & \quad \left( \underline{f}_{c_k}, \underline{\widehat{m}}_{c_k} \right) \in G^{c_k}, \quad \forall k \\ & \quad \text{and} \\ & \quad \frac{1}{|Y|} \sum_{k=1, \dots, r} \left( \underline{f}_{c_k} \cdot \Delta \underline{d}_{c_k} + \underline{\widehat{m}}_{c_k} \cdot \Delta \underline{\delta}_{c_k} \right) - \underline{\Sigma} : \Delta \underline{E} = 0, \quad \forall (\Delta \underline{u}^{per, i}, \Delta \underline{\varphi}^{per, i}, \Delta \underline{E}) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Now, using (1.11) and (1.26) for  $\Delta \underline{E} = 0$ , it is found that  $(I_c)_{c \in \mathcal{C}} \in \mathcal{SA}$ . In addition, the equation (1.26) for  $\Delta \underline{u}^{per, i} = \Delta \underline{\varphi}^{per, i} = 0$  leads to  $\underline{\Sigma} = \frac{1}{|Y|} \sum_{k=1, \dots, r} \underline{f}_{c_k} \otimes^s \underline{l}_{c_k}$ . Finally, it is found that the minimum of  $\Pi^{\text{Tot}}(\underline{U}, \underline{\Phi}) - \underline{\Sigma} : \underline{E}$  is reached at  $(\underline{U}, \underline{\Phi}) = (0, 0)$  if, and only if,  $\underline{\Sigma} \in \mathcal{G}^{\text{hom}}$ . Hence, (1.24) is proved. Combining (1.22) and (1.24) gives the kinematical definition of  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$ .

### 1.1.6 Justification

The justification of the homogenization method for the determination of the overall effective linear elastic properties of the lattice can be found in [Sab, 1996], [Pradel et Sab, 1998] and [Pradel, 1998] where asymptotic expansion method and other related homogenization techniques has been used.

The purpose of this section is to provide a justification for the above proposed homogenization method. It is admitted that  $\Gamma$ -convergence results, similar to those established by [Bouchitté, 1987] for periodic continuous media and by [Sab, 1994] for continuous random media, can be established for discrete lattice materials. However, this would require many mathematical technicalities which are beyond the scope of this paper. Nevertheless, a simple justification can be provided as explained below.

The following notations are needed :  $\mathcal{D}$  is a regular domain of the space ;  $\lambda \mathcal{D} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 / \lambda^{-1} \underline{x} \in \mathcal{D} \}$  is the homothetic of  $\mathcal{D}$ , with  $\lambda > 0$ .  $\mathcal{P}^{\lambda \mathcal{D}} \subset \mathcal{P}$  is the subset of all particles of the lattice which are situated in the interior of domain  $\lambda \mathcal{D}$ .  $\mathcal{C}^{\lambda \mathcal{D}} \subset \mathcal{C}$  is the subset of all interacting couples of particles  $c$  such that at least one of the particles of  $c$  is in  $\mathcal{P}^{\lambda \mathcal{D}}$ . This means that  $\mathcal{C}^{\lambda \mathcal{D}}$  is the set of all connections of all particles of  $\mathcal{P}^{\lambda \mathcal{D}}$ . A couple  $c$  is in  $\mathcal{B}^{\lambda \mathcal{D}} \subset \mathcal{C}^{\lambda \mathcal{D}}$  if one particle of  $c$  is in  $\mathcal{P}^{\lambda \mathcal{D}}$  and the other one is in  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^{\lambda \mathcal{D}}$ . Fig. 1.1(a). It is clear that the ratio of  $\text{Card}(\mathcal{B}^{\lambda \mathcal{D}})$  over  $\text{Card}(\mathcal{C}^{\lambda \mathcal{D}})$  goes to zero as  $\lambda$  goes to infinity, and that the ratio of  $\text{Card}(\mathcal{C}^{\lambda \mathcal{D}})$  over to  $|\lambda \mathcal{D}|$  goes to  $r|Y|^{-1}$ , as  $\lambda$  goes to infinity. Recall that  $r$  is the number of couples of particles that generate the lattice by periodicity.

Similarly to the case of continuum media, the overall  $\pi$ -function associated to domain  $\lambda \mathcal{D}$  can be defined by prescribing the so-called kinematically uniform boundary conditions as follows :

$$\Pi^{\lambda \mathcal{D}}(\underline{E}) = \inf_{(\underline{U}, \underline{\Phi}) \in \mathcal{KA}^{\lambda \mathcal{D}}(\underline{E})} \Pi^{\text{Tot}, \lambda \mathcal{D}}(\underline{U}, \underline{\Phi}) \quad (1.27)$$

where

$$\Pi^{\text{Tot}, \lambda \mathcal{D}}(\underline{U}, \underline{\Phi}) \equiv \frac{1}{|\lambda \mathcal{D}|} \sum_{c \in \mathcal{C}^{\lambda \mathcal{D}}} \pi^c(\underline{d}_c, \underline{\delta}_c) \quad (1.28)$$

and

$$\mathcal{KA}^{\lambda\mathcal{D}}(\underline{E}) = \left\{ (\underline{U}, \underline{\Phi}), \underline{u}^{\alpha,i} = \underline{E} \cdot \underline{X}^{\alpha,i}, \underline{\varphi}^{\alpha,i} = 0, \forall P^{\alpha,i} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^{\lambda\mathcal{D}} \right\} \quad (1.29)$$

According to the above definition, a kinematically admissible deformation field in  $\mathcal{KA}^{\lambda\mathcal{D}}(\underline{E})$  is obtained by superposing the linear homogeneous field  $(\underline{U}^E, \underline{\Phi}^E) \equiv (\underline{u}^{\alpha,i} = \underline{E} \cdot \underline{X}^{\alpha,i}, \underline{\varphi}^{\alpha,i} = 0)$  to a deformation field  $(\underline{U}^*, \underline{\Phi}^*)$  in  $\mathcal{KA}^{\lambda\mathcal{D}}(0)$  which is null on  $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^{\lambda\mathcal{D}}$ .

The justification of the proposed homogenization method is based on the following result :

$$\forall \underline{E}, \forall \mathcal{D}, \Pi^{\text{hom}}(\underline{E}) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Pi^{\lambda\mathcal{D}}(\underline{E}) \quad (1.30)$$

The proof is in two steps :

– Step 1 :

$$\Pi^{\text{hom}}(\underline{E}) \geq \limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \Pi^{\lambda\mathcal{D}}(\underline{E})$$

Let  $(\underline{U}^{\text{per}}, \underline{\Phi}^{\text{per}})$  be an arbitrary periodic deformation field in  $\mathcal{KA}(0)$ . The corresponding generalized strains are noted  $(\underline{d}_c^{\text{per}}, \underline{\delta}_c^{\text{per}})$ . Now, define  $(\tilde{\underline{U}}, \tilde{\underline{\Phi}}) \in \mathcal{KA}^{\lambda\mathcal{D}}(\underline{E})$  by :

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{u}}^{\alpha,i} &= \underline{E} \cdot \underline{X}^{\alpha,i} + \underline{u}^{\text{per},i}, \quad \tilde{\underline{\varphi}}^{\alpha,i} = \underline{\varphi}^{\text{per},i}, \quad \forall P^{\alpha,i} \in \mathcal{P}^{\lambda\mathcal{D}} \\ \tilde{\underline{u}}^{\alpha,i} &= \underline{E} \cdot \underline{X}^{\alpha,i}, \quad \tilde{\underline{\varphi}}^{\alpha,i} = 0, \quad \forall P^{\alpha,i} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^{\lambda\mathcal{D}} \end{aligned}$$

Note that the generalized strains which are associated to  $(\tilde{\underline{U}}, \tilde{\underline{\Phi}})$  are  $(\underline{d}_c, \underline{\delta}_c) = (\underline{E} \cdot \underline{l}_c + \underline{d}_c^{\text{per}}, \underline{\delta}_c^{\text{per}})$  for all  $c \in \mathcal{C}^{\lambda\mathcal{D}} \setminus \mathcal{B}^{\lambda\mathcal{D}}$ , and  $(\underline{d}_c, \underline{\delta}_c) = (\underline{E} \cdot \underline{l}_c + \underline{d}_c^{\text{per}} + \varepsilon \underline{u}^{\text{per},j}, \underline{\delta}_c^{\text{per}} + \varepsilon \underline{\varphi}^{\text{per},j})$  for some  $j = 1, \dots, n$  and  $\varepsilon = \pm 1$ , for  $c \in \mathcal{B}^{\lambda\mathcal{D}}$ . This means that the generalized strains  $(\underline{d}_c, \underline{\delta}_c)$  coincide on  $\mathcal{C}^{\lambda\mathcal{D}} \setminus \mathcal{B}^{\lambda\mathcal{D}}$  with the periodic generalized strains which are associated to  $(\underline{U}^E + \underline{U}^{\text{per}}, \underline{\Phi}^E + \underline{\Phi}^{\text{per}}) \in \mathcal{KA}(\underline{E})$ , and that there is a finite number of values which can be taken by  $\pi(\underline{d}_c, \underline{\delta}_c)$  for  $c \in \mathcal{B}^{\lambda\mathcal{D}}$ . Therefore, it is concluded from periodicity and from definitions (1.23) and (1.28) that  $\Pi^{\text{Tot}}(\underline{U}^E + \underline{U}^{\text{per}}, \underline{\Phi}^E + \underline{\Phi}^{\text{per}}) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Pi^{\text{Tot}, \lambda\mathcal{D}}(\tilde{\underline{U}}, \tilde{\underline{\Phi}})$ .

Now,  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Pi^{\text{Tot}, \lambda\mathcal{D}}(\underline{U}, \underline{\Phi}) \geq \limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \Pi^{\lambda\mathcal{D}}(\underline{E})$  is obtained from definition (1.27). Finally, taking the infimum over  $(\underline{U}^{\text{per}}, \underline{\Phi}^{\text{per}})$  in  $\mathcal{KA}(0)$  leads to  $\Pi^{\text{hom}}(\underline{E}) \geq \limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \Pi^{\lambda\mathcal{D}}(\underline{E})$ .

– Step 2 :

$$\Pi^{\text{hom}}(\underline{E}) \leq \liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \Pi^{\lambda\mathcal{D}}(\underline{E})$$

Let  $(\underline{U}, \underline{\Phi}) = (\underline{U}^E, \underline{\Phi}^E) + (\underline{U}^*, \underline{\Phi}^*) \in \mathcal{KA}^{\lambda\mathcal{D}}(\underline{E})$  and  $\underline{\Sigma}$  in  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$ . From definition (1.18), there is a periodic distribution of interaction forces and moments in  $\mathcal{SA}(\underline{\Sigma})$  with  $(\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c)$  in  $G^c$ , for all  $c$ . Using definition (1.19) of the  $\pi$ -function, we have :

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{Tot}, \lambda\mathcal{D}}(\underline{U}, \underline{\Phi}) &\equiv \frac{1}{|\lambda\mathcal{D}|} \sum_{c \in \mathcal{C}^{\lambda\mathcal{D}}} \pi^c(\underline{d}_c, \underline{\delta}_c) \\ &\geq \frac{1}{|\lambda\mathcal{D}|} \sum_{c \in \mathcal{C}^{\lambda\mathcal{D}}} \underline{f}_c \cdot \underline{d}_c + \underline{\widehat{m}}_c \cdot \underline{\delta}_c = \left( \frac{1}{|\lambda\mathcal{D}|} \sum_{c \in \mathcal{C}^{\lambda\mathcal{D}}} \underline{f}_c \otimes^s \underline{l}_c \right) : \underline{E} \\ &\quad + \frac{1}{|\lambda\mathcal{D}|} \sum_{c \in \mathcal{C}^{\lambda\mathcal{D}}} \underline{f}_c \cdot \underline{d}_c^* + \underline{\widehat{m}}_c \cdot \underline{\delta}_c^* \end{aligned}$$



Note that, up to the normalization factor  $|\lambda\mathcal{D}|$ , the last term in the above inequality is the internal work (or power) done by the interaction forces and moments in the deformation field  $(\underline{U}^*, \underline{\Phi}^*)$ . Hence, it is null because  $(\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c)$  are in  $\mathcal{SA}(\underline{\Sigma})$  and  $(\underline{U}^*, \underline{\Phi}^*) = (0, 0)$  for all  $P^{\alpha,i} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^{\lambda\mathcal{D}}$ . Therefore, taking the  $\liminf_{\lambda \rightarrow +\infty}$  of both sides of the inequality gives  $\underline{\Sigma} : \underline{E} \leq \liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \Pi^{\lambda\mathcal{D}}(\underline{E})$ . Finally, taking the supremum over  $\underline{\Sigma}$  in  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$  and using (1.20) gives  $\Pi^{\text{hom}}(\underline{E}) \leq \liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \Pi^{\lambda\mathcal{D}}(\underline{E})$ .

*Remark :*  $\Pi^{\lambda\mathcal{D}}(\underline{E})$  is the  $\pi$ -function of the overall strength domain  $\mathcal{G}^{\lambda\mathcal{D}}$  which is associated to  $\lambda\mathcal{D}$  by prescribing the so-called kinematically uniform boundary conditions :  $\underline{\Sigma} \in \mathcal{G}^{\lambda\mathcal{D}} \Leftrightarrow \underline{\Sigma} : \underline{E} \leq \Pi^{\lambda\mathcal{D}}(\underline{E}), \forall \underline{E} \in \mathbb{R}^6$ . It can be established that  $\mathcal{G}^{\lambda\mathcal{D}}$  is also the set of overall stresses  $\underline{\Sigma}$  such that there is a distribution of interaction forces and moments verifying the balance equations at each  $P^{\alpha,i} \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^{\lambda\mathcal{D}}$ , with  $(\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c)$  in  $G^c$ , for all  $c$  in  $\mathcal{C}^{\lambda\mathcal{D}}$ , and  $\underline{\Sigma} = \frac{1}{|\lambda\mathcal{D}|} \sum_{c \in \mathcal{C}^{\lambda\mathcal{D}}} \underline{f}_c \otimes^s \underline{l}_c$ . It should be highlighted that the prescription of the so-called statically uniform boundary conditions leads to a lower bound for the overall strength domain which is associated to  $\lambda\mathcal{D}$ , similarly to the continuum case. [De Buhan, 1986] proposed an exemple where the statically uniform boundary conditions lead asymptotically to a strictly lower bound for  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$ , as  $\lambda$  goes to infinity.

## 1.2 Homogenization of periodic hexagonal honeycombs with arbitrary non-uniform wall thickness

In this section, the above described homogenization method is used to analytically determine the overall in-plane properties of a general hexagonal honeycomb in the elastoplastic infinitesimal strain regime, for any arbitrary non-uniform material distribution in the wall thickness. As a matter of fact, a honeycomb material can be seen as a standard 2D periodic continuum material which overall properties can be determined by solving boundary value problems on the unit cell. As the ratio between the wall thickness and the unit cell size is small, a honeycomb material can be seen as a periodic lattice of beams that are rigidely connected in vertices.

The first part of this section is concerned with the discussion of the discrete modelling - in the sense of the above described theory - of a single beam of the lattice, therefore,  $\Psi_*^c$  and  $G^c$  are computed in terms of the geometry and the material properties of the beam. In the second part, the static discrete unit cell problem is formulated : the set  $\mathcal{SA}(\underline{\Sigma})$  of statically compatible generalized stresses is studied and the effective elastic moduli as well as the effective ultimate yield strength domain of the honeycomb are analytically determined using (1.16) and (1.18). Then, the model is used in the third part of this section to investigate the microstructure-property relations of honeycombs having regular hexagonal cell shapes and non-symmetric cell wall thickness. Finally, a comparison of the analytical predictions with finite element computations conducted on a continuum 2-D unit cell is performed in the fourth part of this section.

### 1.2.1 Computation of $\Psi_*$ and $G$ for 2-D Euler-Bernoulli beams with arbitrary non-uniform thickness

The homogenization method which has been introduced for 3D discrete media can be easily adapted to 2D-lattices : since the periodicity involves two in-plane vectors,  $\underline{a}_1$  and  $\underline{a}_2$ , and  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  is in  $\mathbb{Z}^2$ . The motion of particle  $P^{\alpha,i}$  involves two translations  $\underline{u}^{\alpha,i} = (u_1^{\alpha,i}, u_2^{\alpha,i}, 0)$  and one rotation  $\underline{\varphi}^{\alpha,i} = (0, 0, \varphi_3^{\alpha,i})$ . The interaction forces and moments between interacting couples

of particles are of the type  $\underline{f} = (f_1, f_2, 0)$  and  $\underline{m} = (0, 0, m_3)$ . Finally,  $\underline{\Sigma}$  and  $\underline{E}$  are second order symmetric tensors of  $\mathbb{R}^2$ .

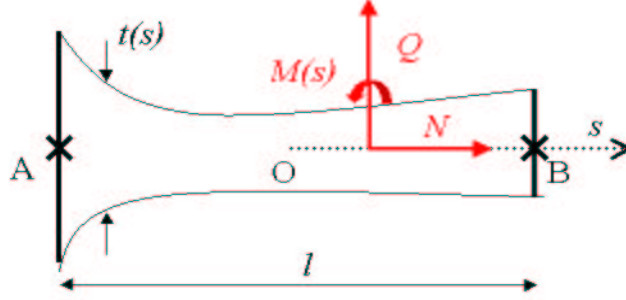


FIGURE 1.2. *Beam with non-uniform thickness*

Consider a beam of length  $l$  and non-uniform thickness  $t(s)$ ,  $-\frac{l}{2} \leq s \leq \frac{l}{2}$ , as shown in Fig. 1.2. The width of the beam is uniform. A standard elastoplastic constitutive law is assumed :  $E^*$  is the Young modulus and  $\sigma^*$  is the tensile yield stress. Under the action of the forces and moments at the ends of the beam (i.e., at points  $A : s = -\frac{l}{2}$ , and  $B : s = \frac{l}{2}$  in Fig. 1.2), it is assumed that the axial stress  $\sigma_{ss}(s, y)$  is the only non negligible in-plane stress component. The axial force  $N(s)$  and the bending moment  $M(s)$  are :

$$N(s) = \int_{-t(s)/2}^{t(s)/2} \sigma_{ss}(s, y) dy \quad (1.31)$$

$$M(s) = \int_{-t(s)/2}^{t(s)/2} -z \sigma_{ss}(s, y) dy \quad (1.32)$$

The balance equation imposes :

$$N(s) = N \quad (1.33)$$

$$M(s) = \overline{M} - sQ \quad (1.34)$$

where  $Q$  is the shear force and  $\overline{M}$  is the bending moment at the mid-point of the beam ( $s = 0$ ).

Considering that  $A$  and  $B$  are particles in the sense of the above described theory, the generalized stress associated to couple  $c = \{A, B\}$ , which is oriented from  $A$  to  $B$ , is :

$$\underline{f}_c = \begin{pmatrix} N \\ Q \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{\widehat{m}}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \overline{M} \end{pmatrix}$$

The branch vector and the generalized strain are :

$$\underline{l}_c = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{d}_c = \begin{pmatrix} u_1^B - u_1^A \\ u_2^B - u_2^A - l \frac{\varphi_3^A + \varphi_3^B}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and } \underline{\delta}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_3^B - \varphi_3^A \end{pmatrix}$$

### 1.2.1.1 Computation of $\Psi_*$

In the elastic regime,  $\sigma_{ss}(s, y)$  is linear in  $y$  :

$$\sigma_{ss}(s, y) = \frac{N}{t(s)} - \frac{\overline{M} - sQ}{I(s)}y, \quad I(s) = \frac{t^3(s)}{12}$$

The stress energy of the beam per unit of width is :

$$\Psi_*^c = \int_{-l/2}^{l/2} \left( \int_{-t(s)/2}^{t(s)/2} \frac{\sigma_{ss}^2}{2E^*} dy \right) ds$$

Obviously,  $\Psi_*^c$  is quadratic and strictly positive in the generalized stress components,  $(N, Q, \overline{M})$  :

$$\Psi_*^c(N, Q, \overline{M}) = \frac{1}{2E^*} \left( a_{NN}N^2 + a_{QQ}Q^2 - 2a_{Q\overline{M}}Q\overline{M} + a_{\overline{M}\overline{M}}\overline{M}^2 \right) \quad (1.35)$$

with

$$a_{NN} = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{ds}{t(s)}, \quad a_{QQ} = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{s^2 ds}{I(s)}, \quad a_{Q\overline{M}} = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{s ds}{I(s)} \quad \text{and} \quad a_{\overline{M}\overline{M}} = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{ds}{I(s)}$$

Therefore, the symmetric matrix  $\underline{\underline{K}}^c$  can be written :

$$\begin{pmatrix} N \\ Q \\ \overline{M} \end{pmatrix} = \frac{1}{E^*} \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{NN}} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} a_{QQ} & a_{Q\overline{M}} \\ a_{Q\overline{M}} & a_{\overline{M}\overline{M}} \end{bmatrix}^{-1} \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_{c1} \\ d_{c2} \\ \delta_{c3} \end{pmatrix}$$

For a symmetric beam,

$$t(s) = t(-s) \Rightarrow a_{Q\overline{M}} = 0$$

For a beam with uniform thickness,  $t(s) = t$ ,

$$\Psi_*^c(N, Q, \overline{M}) = \frac{1}{2E^*} \left( \frac{N^2 l}{t} + \frac{Q^2 l^3}{12I} + \frac{\overline{M}^2 l}{I} \right) \quad (1.36)$$

and

$$\Psi^c(\underline{d}_c, \underline{\delta}_c) = \frac{1}{2} E^* \left( \frac{t}{l} (u_1^B - u_1^A)^2 + \frac{12I}{l^3} \left( u_2^B - u_2^A - l \frac{\varphi_3^A + \varphi_3^B}{2} \right)^2 + \frac{I}{l} (\varphi_3^B - \varphi_3^A)^2 \right)$$

### 1.2.1.2 Computation of $G$

The strength criterion can be written as follows :

$$|\sigma_{ss}(s, y)| \leq \sigma^* \quad (1.37)$$

The ultimate yield strength criterion of the beam is the set of generalized stress components  $(N, Q, \overline{M})$  such that there is a  $\sigma_{ss}(s, y)$  satisfying (1.31) and (1.32) for all  $s$  and (1.37) for all  $(s, y)$ . For any couple of real numbers  $(\epsilon, \chi)$ , and for fixed  $s$ , it is found that :

$$\epsilon N(s) + \chi M(s) = \int_{-t(s)/2}^{t(s)/2} (\epsilon - \chi y) \sigma_{ss}(s, y) dy \leq \sigma^* \int_{-t(s)/2}^{t(s)/2} |\epsilon - \chi y| dy \equiv p(\epsilon, \chi; s) \quad (1.38)$$

Of course,  $(\epsilon, \chi)$  are in duality with  $(N(s), M(s))$ , and  $p(\epsilon, \chi; s)$  is the support function of the convex set of  $(N(s), M(s))$  such that there is a  $\sigma_{ss}(s, y)$  satisfying (1.31) and (1.32). A straightforward derivation shows that :

$$\begin{aligned} p(\epsilon, \chi; s) &= |\chi| \left( \frac{t(s)^2}{4} + \frac{\epsilon^2}{\chi^2} \right) \sigma^* \quad \text{if } |\epsilon| \leq \frac{t(s)}{2} |\chi| \\ &= |\epsilon| t(s) \sigma^* \quad \text{if } |\epsilon| \geq \frac{t(s)}{2} |\chi| \end{aligned} \quad (1.39)$$

For  $\chi = 0$ , (1.38) and (1.39) give  $|N(s)| \leq t(s) \sigma^*$ . Optimizing the inequality (1.38) over  $\epsilon$ , for fixed  $\chi = \pm 1$ , gives  $\pm M(s) \leq \frac{t(s)^2}{4} \sigma^* - \frac{N(s)^2}{4\sigma^*}$ . Therefore, the criterion at section  $s$  is :

$$\frac{N(s)^2}{t(s)^2 \sigma^*} + \frac{4}{t(s)^2} |M(s)| \leq \sigma^* \quad (1.40)$$

Using (1.33), (1.34) and the following notations :

$$-\frac{1}{2} \leq \tilde{s} = \frac{s}{l} \leq \frac{1}{2}, \quad \tilde{t}(\tilde{s}) = \frac{t(s)}{l}, \quad \tilde{N} = \frac{N}{l \cdot \sigma^*}, \quad \tilde{Q} = \frac{Q}{l \cdot \sigma^*} \quad \text{and} \quad \tilde{M} = \frac{\overline{M}}{l^2 \cdot \sigma^*} \quad (1.41)$$

it can be shown that  $G$ , the strength domain of the beam, is the set of  $(N, Q, \overline{M})$  such that :

$$-g(-\tilde{Q}) + \frac{\tilde{N}^2}{4} \leq \tilde{M} \leq g(\tilde{Q}) - \frac{\tilde{N}^2}{4} \quad (1.42)$$

where

$$g(\tilde{Q}) = \inf_{-\frac{1}{2} \leq \tilde{s} \leq \frac{1}{2}} \left\{ \frac{\tilde{t}(\tilde{s})^2}{4} + \tilde{s} \cdot \tilde{Q} \right\} \quad (1.43)$$

In the special case of symmetric beams,  $\tilde{t}(\tilde{s}) = \tilde{t}(-\tilde{s})$ ,  $g(\tilde{Q}) = g(-\tilde{Q})$  and (1.42) writes :

$$\left| \tilde{M} \right| + \frac{\tilde{N}^2}{4} \leq g(\tilde{Q})$$

For uniform thickness  $\tilde{t}(\tilde{s}) = \tilde{t}^m = \frac{t}{l}$ ,  $g(\tilde{Q})$  is given by :

$$g(\tilde{Q}) = \frac{\tilde{t}^m{}^2}{4} - \frac{1}{2} |\tilde{Q}| \quad (1.44)$$

### 1.2.2 The general case

General hexagonal periodic lattices are considered in this paper. Fig. 1.3(a). The lattice is composed of two types of particles (particles  $A$  and particles  $B$ ), and three oriented beams  $BA_i$ , with length  $l_i$  and non-uniform thickness  $t_i(s)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). The corresponding branch vectors are :

$$l_1 = \begin{pmatrix} -l_1 \cos \theta_1 \\ -l_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} l_2 \cos \theta_2 \\ -l_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad l_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ l_3 \end{pmatrix}$$

The whole material is obtained by repetition of the unit cell of Fig. 1.3(b) according to translation vectors  $\underline{a}$  and  $\underline{b}$  where  $\underline{a} = l_2 - l_1$  and  $\underline{b} = l_3 - l_1$

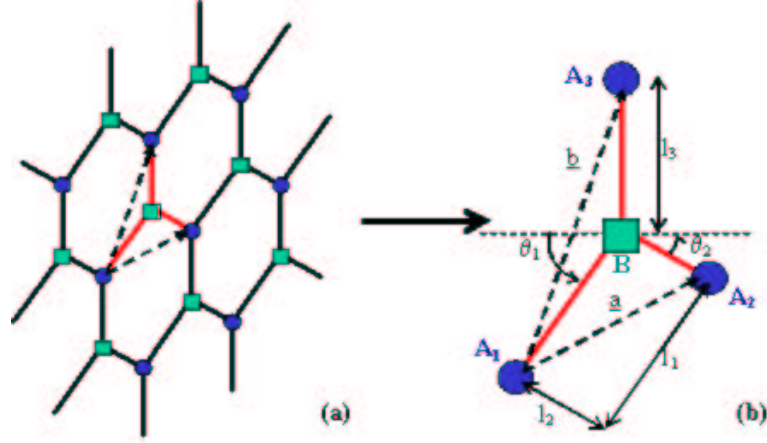


FIGURE 1.3. (a) Hexagonal cellular lattice and (b) Geometry of the unit cell

The unit cell area is  $|Y| = |\underline{a} \wedge \underline{b}| = l_1 l_3 \cos \theta_1 + l_2 l_3 \cos \theta_2 + l_1 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$ , and we say that the cell is symmetric if the material distribution in each cell wall is symmetric :

$$t_i(s) = t_i(-s), \quad i = 1, 2, 3.$$

#### 1.2.2.1 Determination of $\mathcal{SA}(\underline{\Sigma})$

Let  $(N_i, Q_i, \overline{M}_i)$ , denote the generalized stress components of beam  $i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Recall that  $N_i$  is the axial force,  $Q_i$  is the shearing force and  $\overline{M}_i$  is the bending moment at the mid-point of the beam  $i$  as shown in Fig. 1.4.

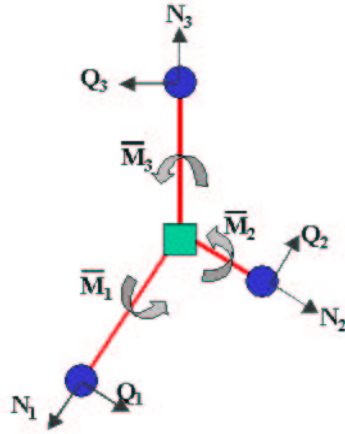


FIGURE 1.4. Forces and moments in the unit cell

The balance equations at node  $B$  can be written :

$$N_1 \sin \theta_1 + N_2 \sin \theta_2 + Q_1 \cos \theta_1 - Q_2 \cos \theta_2 - N_3 = 0 \quad (1.45)$$

$$-N_1 \cos \theta_1 + N_2 \cos \theta_2 + Q_1 \sin \theta_1 + Q_2 \sin \theta_2 - Q_3 = 0 \quad (1.46)$$

$$\left(\overline{M}_1 + \frac{l_1}{2}Q_1\right) + \left(\overline{M}_2 + \frac{l_2}{2}Q_2\right) + \left(\overline{M}_3 + \frac{l_3}{2}Q_3\right) = 0 \quad (1.47)$$

Using periodicity, the balance equations at any node  $A_i$  are expressed by (1.45), (1.46) and (1.48).

$$\left(\overline{M}_1 - \frac{l_1}{2}Q_1\right) + \left(\overline{M}_2 - \frac{l_2}{2}Q_2\right) + \left(\overline{M}_3 - \frac{l_3}{2}Q_3\right) = 0 \quad (1.48)$$

Combining (1.47) and (1.48) gives (1.49) and (1.50) :

$$l_1 \cdot Q_1 + l_2 \cdot Q_2 + l_3 \cdot Q_3 = 0 \quad (1.49)$$

$$\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \overline{M}_3 = 0 \quad (1.50)$$

Therefore, the set  $\mathcal{SA}$  of statically admissible periodic interactions of the infinite lattice is the set of  $(N_i, Q_i, \overline{M}_i)$ , with  $i = 1, 2, 3$ , in such away that (1.45-1.46) and (1.49-1.50) hold.

Let  $\underline{\underline{\Sigma}}$  denotes the macroscopic in-plane stress which is associated to  $(N_i, Q_i, \overline{M}_i)$  :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|Y|} \sum_{i=1,2,3} \underline{f}_i \otimes^s \underline{l}_i$$

with

$$\underline{f}_1 = \begin{pmatrix} -N_1 \cos \theta_1 + Q_1 \sin \theta_1 \\ -N_1 \sin \theta_1 - Q_1 \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} N_2 \cos \theta_2 + Q_2 \sin \theta_2 \\ -N_2 \sin \theta_2 + Q_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix} \text{ and } \underline{f}_3 = \begin{pmatrix} -Q_3 \\ N_3 \end{pmatrix}$$

This gives  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{12}$  and  $\Sigma_{22}$  in terms of  $(N_i, Q_i)$  :

$$\Sigma_{11} = \frac{l_1}{S} (N_1 \cos^2 \theta_1 - \frac{1}{2}Q_1 \sin 2\theta_1) + \frac{l_2}{S} (N_2 \cos^2 \theta_2 + \frac{1}{2}Q_2 \sin 2\theta_2)$$

$$\Sigma_{22} = \frac{l_1}{S} (N_1 \sin^2 \theta_1 + \frac{1}{2}Q_1 \sin 2\theta_1) + \frac{l_2}{S} (N_2 \sin^2 \theta_2 - \frac{1}{2}Q_2 \sin 2\theta_2) + \frac{l_3}{S} N_3$$

$$\Sigma_{12} = \frac{l_1}{2S} (N_1 \sin 2\theta_1 + Q_1 \cos 2\theta_1) + \frac{l_2}{2S} (-N_2 \sin 2\theta_2 + Q_2 \cos 2\theta_2) - \frac{l_3}{2S} Q_3$$

Reciprocally, using the above equations and balance equations (1.45), (1.46) and (1.49),  $(N_i, Q_i)$  can be expressed in terms of  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{12}$  and  $\Sigma_{22}$  as follows :

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ N_3 \\ Q_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (l_3 + l_2 \sin \theta_2) \cos \theta_1 & l_3 \sin \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & l_2 \cos \theta_2 \sin \theta_1 \\ (l_3 + l_1 \sin \theta_1) \cos \theta_2 & -l_3 \sin \theta_2 - l_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) & l_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ -(l_3 + l_2 \sin \theta_2) \sin \theta_1 & l_3 \cos \theta_1 + l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) & l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ (l_3 + l_1 \sin \theta_1) \sin \theta_2 & l_3 \cos \theta_2 + l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) & -l_1 \cos \theta_2 \cos \theta_1 \\ 0 & l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1 & l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \\ l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin \theta_2 & -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{12} \\ \Sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

Therefore, the set  $\mathcal{SA}(\underline{\underline{\Sigma}})$  of statically compatible generalized stresses  $(N_i, Q_i, \overline{M}_i)$ , with  $i = 1, 2, 3$ , is such that  $(N_i, Q_i)$  are linearly expressed in terms of the macroscopic in-plane stress components by (1.51), and the undetermined bending moments  $\overline{M}_i$  must verify (1.50).

### 1.2.2.2 Overall elastic constants

The effective elastic moduli of the honeycomb can be calculated using (1.16) and (1.35). In this minimization problem,  $(N_i, Q_i)$  are fixed and the unknowns to be determined are the three bending moments  $\bar{M}_i$ , under constraint (1.50). Using Lagrange multiplier, the minimum in (1.16) is reached for :

$$\bar{M}_i = \frac{\lambda + a_{QM}^{(i)} Q_i}{a_{MM}^{(i)}} \quad \text{with} \quad \lambda = - \frac{\sum_{i=1,2,3} \frac{a_{QM}^{(i)} Q_i}{a_{MM}^{(i)}}}{\sum_{i=1,2,3} \frac{1}{a_{MM}^{(i)}}}$$

With the above expressions and (1.51),  $\bar{M}_i$  can be linearly expressed in terms of the macroscopic in-plane stress components  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{12}$  and  $\Sigma_{22}$ . Therefore,  $\Psi_*^{\text{hom}}(\underline{\Sigma})$  is completely determined. Note that  $\bar{M}_i = 0$  in the special case of symmetric cell since, in this case,  $a_{QM}^{(i)} = 0$  for  $i = 1, 2, 3$ .

### 1.2.2.3 Overall strength domain

According to the static approach (1.18), the effective ultimate yield strength domain is the set  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$  of macroscopic stress states  $\underline{\Sigma}$  associated to the periodic interactions verifying the balance equations and the yield conditions at the microscopic scale. Using this definition and the beam yield criterion (1.42), it is found that  $\underline{\Sigma}$  is in  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$  if, and only if, there is a  $\bar{M}_i$ , with  $i = 1, 2, 3$ , verifying (1.50) and the following conditions :

$$-g(-\tilde{Q}_i) + \frac{\tilde{N}_i^2}{4} \leq \tilde{M}_i \leq g(\tilde{Q}_i) - \frac{\tilde{N}_i^2}{4} \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.52)$$

where  $(N_i, Q_i)$  are given by (1.51) and notations (1.41) are used for each beam.

From (1.52), a necessary condition is that the right member of (1.52) is greater or equal to its left member :

$$\frac{\tilde{N}_i^2}{4} \leq \frac{g_i(\tilde{Q}_i) + g_i(-\tilde{Q}_i)}{2} \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.53)$$

The above conditions ensure that the parallelepiped in the space of bending moments  $\bar{M}_i$ , with  $i = 1, 2, 3$ , defined by (1.52) is nonempty. The intersection of this parallelepiped with the plane defined by (1.50) is nonempty if, and only if, the following additional conditions hold :

$$\begin{aligned} 0 &\leq l_1^2 \left( g(\tilde{Q}_1) - \frac{\tilde{N}_1^2}{4} \right) + l_2^2 \left( g(\tilde{Q}_2) - \frac{\tilde{N}_2^2}{4} \right) + l_3^2 \left( g(\tilde{Q}_3) - \frac{\tilde{N}_3^2}{4} \right) \\ 0 &\leq l_1^2 \left( g(-\tilde{Q}_1) - \frac{\tilde{N}_1^2}{4} \right) + l_2^2 \left( g(-\tilde{Q}_2) - \frac{\tilde{N}_2^2}{4} \right) + l_3^2 \left( g(-\tilde{Q}_3) - \frac{\tilde{N}_3^2}{4} \right) \end{aligned} \quad (1.54)$$

Finally, it is found that  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$  is the closed convex set of  $\underline{\Sigma}$  such that inequalities (1.53-1.54) are verified with  $(N_i, Q_i)$  given by (1.51), and  $g(\tilde{Q}_i)$  defined by (1.43). For symmetric cells,  $g_i(\tilde{Q}_i) = g_i(-\tilde{Q}_i)$  for  $i = 1, 2, 3$ , and it is always possible to choose  $\bar{M}_i = 0$  in (1.52) if (1.53) is true. In this case, (1.53) are necessary and sufficient conditions for  $\underline{\Sigma}$  to be in  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$  and (1.54) become positive combinations of (1.53).

### 1.2.3 Application to regular hexagonal honeycombs with non-symmetric cell walls

The model is used to investigate the microstructure-property relations of honeycombs having regular hexagonal cell shapes and non-symmetric cell wall thickness. Many efforts have been made to investigate the effects of imperfections, such as irregular cell shape ([Grenestedt et Tanaka, 1999], [Silva et al., 1995], [Fazekas et al., 2002]), non-uniform cell wall thickness ([Kraynik et al., 1991], [Warren et Kraynik, 1987], [Simone et Gibson, 1998], [Chen et al., 1999], [Kim et Al-Hassani, 2002], [Grenestedt et Bassinet, 2000]), wavy cell walls ([Grenestedt, 1998], [Simone et Gibson, 1998]), and missing or fractured cell walls ([Silva et Gibson, 1997], [Chen et al., 1999]), on mechanical properties of cellular materials. [Simone et Gibson, 1998] used the finite element method to study the effect of Plateau borders on the mechanical properties of hexagonal honeycombs. They used specific foam geometry in which uniform struts join at Plateau borders with constant radius of curvature. [Chen et al., 1999] considered the influence of non-uniform cell wall thickness, using a simple linear geometrical model in which the cell wall thickness decreases linearly from the joint to the mid-point of the strut. More recently, [Kim et Al-Hassani, 2002] have shown that the presence of taper in struts can increase or decrease the plastic collapse strength of cellular materials, depending on the strut morphology. In the above mentioned studies, the considered non-uniform cell wall thicknesses are symmetric :  $\tilde{t}(\tilde{s}) = \tilde{t}(-\tilde{s})$ .

The analytical model described above is used to investigate the effect of non-symmetric material distribution in the cell edges of regular hexagonal honeycombs with

$$\theta_1 = \theta_2 = 30^\circ \text{ and } l_1 = l_2 = l_3 = l$$

on the overall stiffness and the overall strength of these materials.

Identical beams oriented from particle  $B$  to particles  $A_i$  having the following non-symmetric material distribution are considered :

$$\tilde{t}(\tilde{s}) = \tilde{t}^m \left( 1 + \Delta\tilde{t} \left( \frac{(\tilde{s} - \tilde{s}_0)^2}{\frac{1}{12} + \tilde{s}_0^2} - 1 \right) \right)$$

where

- $\tilde{t}^m$  is the mean normalized thickness :  $\langle \tilde{t} \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{t}(\tilde{s}) d\tilde{s} = \frac{1}{l^2} \int_{-l/2}^{l/2} t(s) ds = \tilde{t}^m$ ,
- $\Delta\tilde{t}$  is the relative variation of thickness,
- $-\frac{1}{2} \leq \tilde{s}_0 \leq \frac{1}{2}$  is the coordinate of the section where beam thickness is minimum.

$\tilde{s}_0$  is a new defect parameter which describes the non-symmetry of the material distribution in the cell edges. For  $\Delta\tilde{t} = 0$ , the material distribution is uniform and  $\tilde{t}^m = \frac{t}{l}$ . For  $\Delta\tilde{t} \neq 0$ , the minimum thickness  $\tilde{t}^m (1 - \Delta\tilde{t})$  is reached at  $\tilde{s} = \tilde{s}_0$ . In the special case  $\tilde{s}_0 = 0$ , the strut is symmetric as shown in Fig. 1.5. For  $\Delta\tilde{t} \neq 0$  and  $\tilde{s}_0 \neq 0$ , the strut is not symmetric. Fig. 1.6 is a schematic representation of the material distribution for  $\Delta\tilde{t} \neq 0$  and  $\tilde{s}_0 = \frac{1}{2}$ .

#### 1.2.3.1 Linear elasticity

The uniform case  $\Delta\tilde{t} = 0$  and  $\tilde{t}(\tilde{s}) = \tilde{t}^m = \frac{t}{l}$  has been already studied by [Gibson et Ashby, 1997] and [Chen et al., 1999] among others. Using (1.16), (1.36) and (1.51) with  $\bar{M}_i = 0$ , the homogenized Young modulus  $E^{\text{hom}}$  and Poisson's ratio  $\nu^{\text{hom}}$  of the uniform regular honeycomb are obtained :

$$\frac{E^{\text{hom}}}{E^*} = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{\tilde{t}^{m3}}{(1 + 3\tilde{t}^{m2})}, \quad \nu^{\text{hom}} = \frac{1 - \tilde{t}^{m2}}{1 + 3\tilde{t}^{m2}}$$



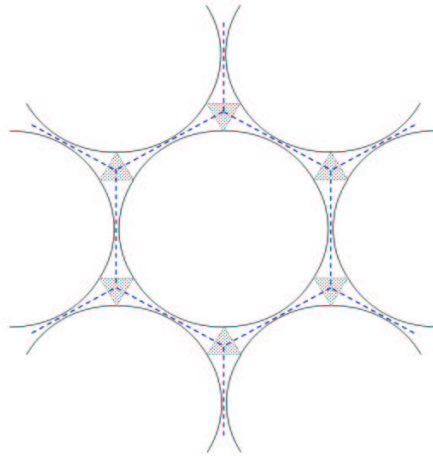


FIGURE 1.5. *Regular lattice with  $\Delta\tilde{t} = 0$*

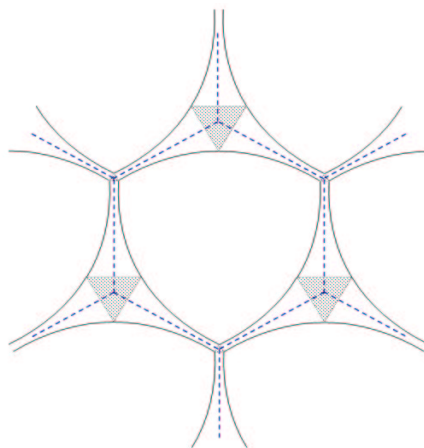


FIGURE 1.6. *Regular lattice with  $\Delta\tilde{t} \neq 0$ ,  $\tilde{s}_0 = 0.5$*

The above expressions are slightly different from those of [Gibson et Ashby, 1997] ( $\frac{E^{\text{hom}}}{E^*} = \frac{4\tilde{t}^m}{\sqrt{3}}$  and  $\nu^{\text{hom}} = 1$ ) because the effect of normal forces  $N_i$  is taken into account in the stress energy (1.36). For  $\tilde{t}^m = 0.15$ , the relative differences between these models are 6.3% for  $E^{\text{hom}}$  and 8.4% for  $\nu^{\text{hom}}$ . Two-dimensional finite element computations have been conducted for the determination of  $E^{\text{hom}}$  and  $\nu^{\text{hom}}$ . The numerical results for  $E^{\text{hom}}$  fit better with Gibson and Ashby formula (0.68% of relative error), while they fit better with the proposed formula for  $\nu^{\text{hom}}$  (0.16% of relative error).

The dependence of the normalized Young modulus  $\frac{E^{\text{hom}}}{E^*}$  upon the non-symmetry parameter  $\tilde{s}_0$  for  $\tilde{t}^m = 0.15$  and four different  $\Delta\tilde{t}$  is presented in Fig. 1.7. It should be noticed that the symmetric non-uniform material distribution ( $\Delta\tilde{t} \neq 0$ ,  $\tilde{s}_0 = 0$ ) is stiffer than the uniform one (the effect is about 40% for  $\Delta\tilde{t} = 0.4$ ). It is also stiffer than the corresponding non-symmetric material distribution with  $\tilde{s}_0 = \frac{1}{2}$  (the effect is greater than 40% for  $\Delta\tilde{t} = 0.4$ ). On the other hand, depending on  $\Delta\tilde{t}$  and  $\tilde{s}_0$  the non-symmetric material distribution is stiffer or softer than the uniform one.

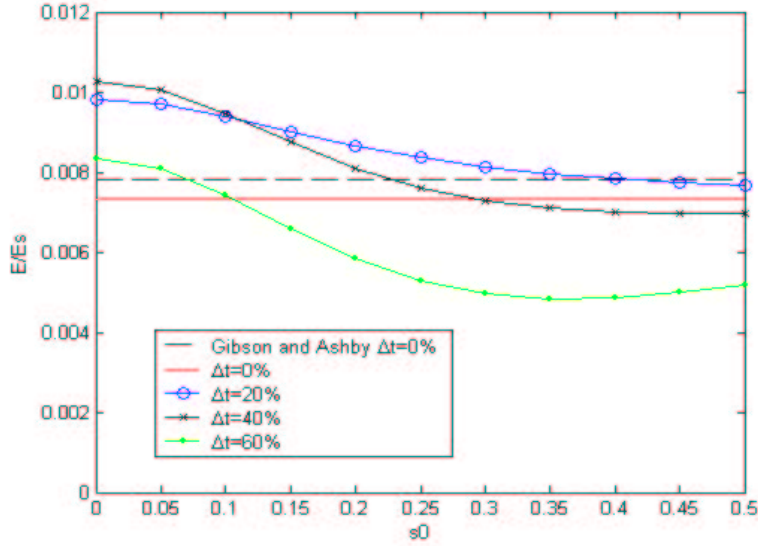


FIGURE 1.7. Normalized Young modulus versus  $\tilde{s}_0$  for  $\tilde{t}^m = 0.15$  and different  $\Delta\tilde{t}$

The dependence of the Poisson's ratio upon the non-symmetry parameter  $\tilde{s}_0$  for  $\tilde{t}^m = 0.15$  and four different  $\Delta\tilde{t}$  is presented in Fig. 1.8. It is clear from this figure that  $\tilde{s}_0$  has no significant effect on Poisson ratio.

### 1.2.3.2 Overall strength domain

The influence of the non-symmetry parameter  $\tilde{s}_0$  on the strength domain  $G$  of a beam is studied, thereby the function  $g(\tilde{Q})$ , which is defined by (1.43), is computed for three cases :

- The uniform case  $\Delta\tilde{t} = 0$  for which  $g(\tilde{Q})$  is given by (1.44).
- The symmetric case  $\Delta\tilde{t} = 0.2$  and  $\tilde{s}_0 = 0$ .
- The non-symmetric case  $\Delta\tilde{t} = 0.2$  and  $\tilde{s}_0 = 0.2$ .

Fig. 1.9 shows the strength domain of the beam, (1.42), for  $N = 0$ , in the plane of the normalized shear force  $\frac{\tilde{Q}}{\tilde{t}^m}$  and the normalized bending moment  $\frac{\tilde{M}}{\tilde{t}^m}$ . Fig. 1.10 shows the strength domain for  $Q = 0$ , in the plane of the normalized normal force  $\frac{\tilde{N}}{\tilde{t}^m}$  and the normalized bending moment  $\frac{\tilde{M}}{\tilde{t}^m}$ . It is observed Fig. 1.9 that  $\tilde{s}_0$  rotates and deforms the strength domain in the  $N = 0$  plane. For

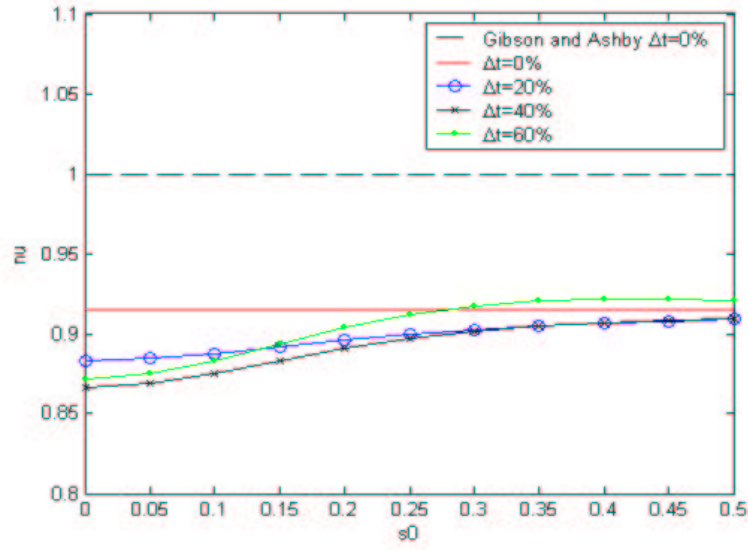


FIGURE 1.8. Poisson ratio versus  $\tilde{s}_0$  for  $\tilde{t}^m = 0.15$  and different  $\Delta\tilde{t}$

$N = 0$ , a non-symmetric material distribution will increase or decrease the plastic collapse strength of the beam, depending on the ratio of  $\frac{\tilde{Q}}{\tilde{t}^{m2}}$  and  $\frac{\tilde{M}}{\tilde{t}^{m2}}$ . For  $Q = 0$ ,  $g(\tilde{Q} = 0) = \frac{\tilde{t}^{m2}}{4} (1 - \Delta\tilde{t})^2$  does not depend on  $\tilde{s}_0$ . Fig. 1.10 shows the effect of  $\Delta\tilde{t}$  on the strength domain of the beam in this plane. A non-uniform material decreases the plastic collapse strength of the beam in the  $\tilde{Q} = 0$  plane.

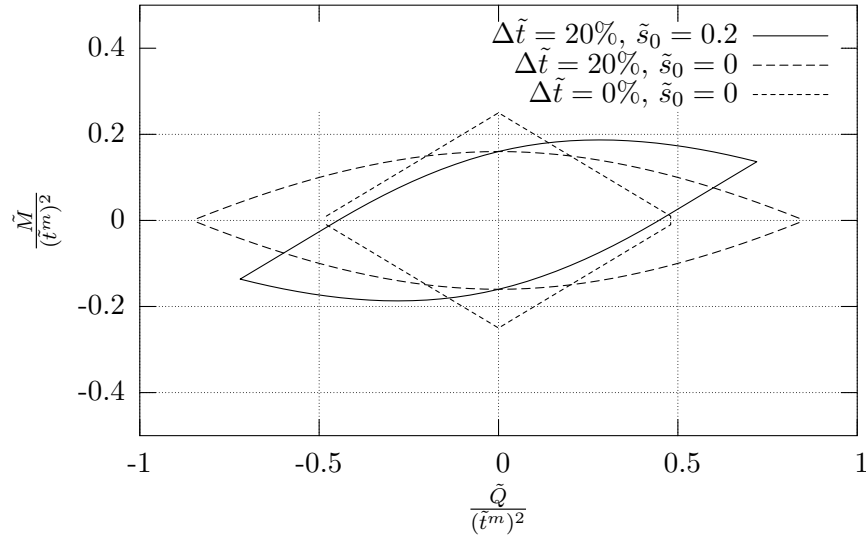


FIGURE 1.9. Strength domain of the beam in the plane  $\tilde{N} = 0$  for three  $(\Delta\tilde{t}, \tilde{s}_0)$

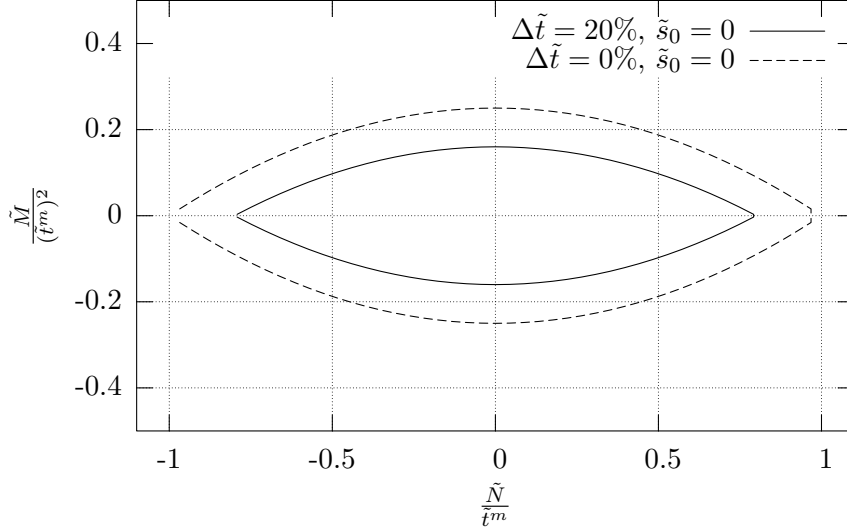


FIGURE 1.10. *Strength domain of the beam in the plane  $\tilde{Q} = 0$  for three  $(\Delta\tilde{t}, \tilde{s}_0)$*

As for studying the influence of the non-symmetry parameter  $\tilde{s}_0$  on the overall strength domain of the hexagonal lattice, recall that  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$  is the closed convex set of  $\underline{\underline{\Sigma}}$  such that inequalities (1.53-1.54) are verified with  $(N_i, Q_i)$  given by (1.51), and  $g(\tilde{Q}_i)$  defined by (1.43).

For the uniform case  $\Delta\tilde{t} = 0$ , it is found from (1.53), (1.51) and (1.44) that  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$  is the convex set of  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12})$  defined by :

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \left( \frac{3}{2} \Sigma_{11} \pm \sqrt{3} \Sigma_{12} + \frac{1}{2} \Sigma_{22} \right)^2 + \sqrt{3} \sigma^* \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma_{11} \mp \Sigma_{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma_{22} \right| - \sigma^{*2} \tilde{t}^{m2} &\leq 0 \\ 3 \Sigma_{22}^2 + 2\sqrt{3} \sigma^* |\Sigma_{12}| - \sigma^{*2} \tilde{t}^{m2} &\leq 0 \end{aligned} \quad (1.55)$$

One can verify that this is consistent with the results of [Chen et al., 1999] for  $\tilde{t}^{m2} \ll 1$ .

Fig. 1.11 represents the dependence of the deviatoric yield strength  $\Sigma$  defined by (1.56) on the inclination  $\Omega$  of principal stresses relative to the microstructure for  $\tilde{t}^m = 0.15$  and four selected values of  $\Delta\tilde{t}$  :  $\Delta\tilde{t} = 0$  (the uniform case, Fig. 1.11(a)),  $\Delta\tilde{t} = 0.2$  (Fig. 1.11(b)),  $\Delta\tilde{t} = 0.4$  (Fig. 1.11(c)) and  $\Delta\tilde{t} = 0.6$  (Fig. 1.11(d)).

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \Sigma \begin{pmatrix} \cos(2\Omega) & \sin(2\Omega) \\ \sin(2\Omega) & -\cos(2\Omega) \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

Three values of  $\tilde{s}_0$  are selected :  $\tilde{s}_0 = 0$  (the symmetric case),  $\tilde{s}_0 = 0.2$  and  $\tilde{s}_0 = \frac{1}{2}$  as shown in Fig. 1.11(a)-(d). It is observed that  $\Delta\tilde{t}$  and  $\tilde{s}_0$  have no significant effect on the weak anisotropy of the material. It should be highlighted that the symmetric non-uniform material distribution ( $\Delta\tilde{t} \leq 0.6$ ,  $\tilde{s}_0 = 0$ ) is more resistant than the uniform one (the effect is about 75% for  $\Delta\tilde{t} = 0.2$ ), and it is also more resistant than the corresponding non-symmetric material distribution with  $\tilde{s}_0 = \frac{1}{2}$  (the effect is about 40% for  $\Delta\tilde{t} = 0.2$ ). Fig. 1.12 represents the dependance of the maximum ( $\Omega = 0^\circ$ ) and the minimum ( $\Omega = 15^\circ$ ) deviatoric yield strength on  $\tilde{s}_0$  for  $\Delta\tilde{t} = 0.4$ . Note that the yield strength decreases as  $\tilde{s}_0$  increases from zero to 0.3, then it increases very slightly as  $\tilde{s}_0$  increases from 0.3 to 0.5.

Fig. 1.13 represents the yield surface in the  $\Sigma_{12} = 0$  plane for  $\tilde{t}^m = 0.15$  and the same four selected values of  $\Delta\tilde{t}$ . It is observed that the domain is truncated for  $\Delta\tilde{t} \neq 0$  by two parallel

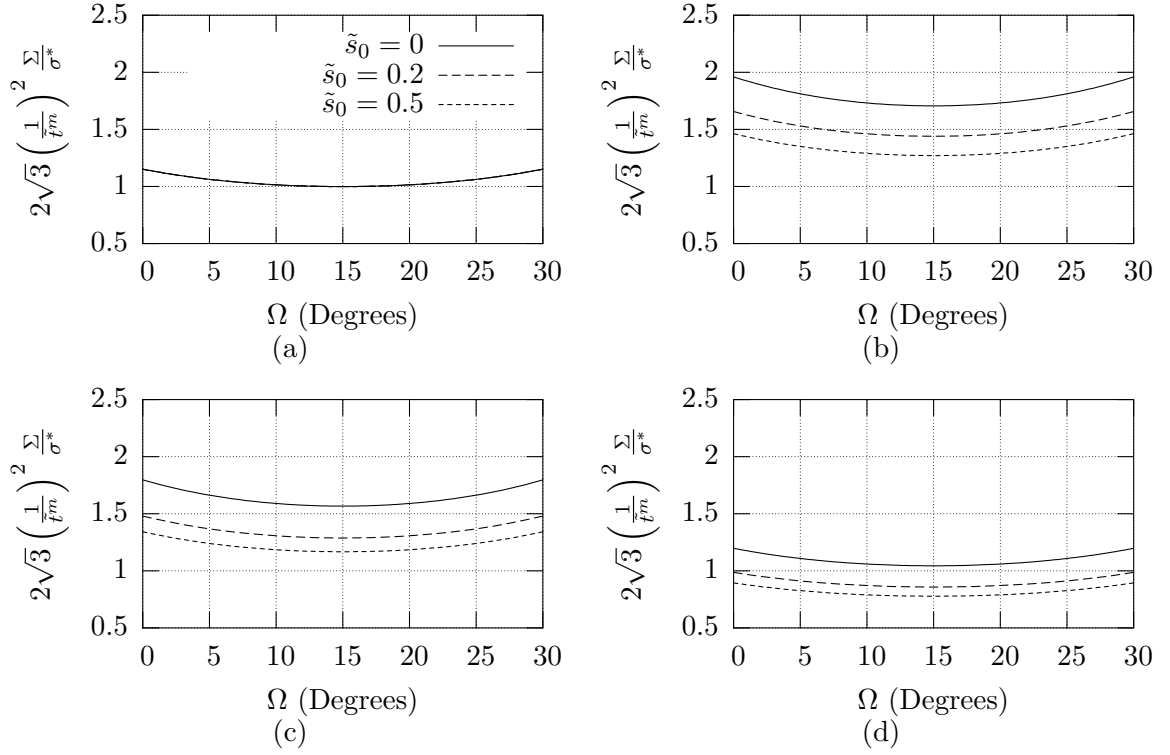


FIGURE 1.11. *Dependence of the deviatoric yield strength  $\Sigma$  upon the inclination  $\Omega$  of principal stresses relative to the microstructure for  $\tilde{t}^m = 0.15$  (a)  $\Delta\tilde{t} = 0\%$ , (b)  $\Delta\tilde{t} = 20\%$ , (c)  $\Delta\tilde{t} = 40\%$  and (d)  $\Delta\tilde{t} = 60\%$*

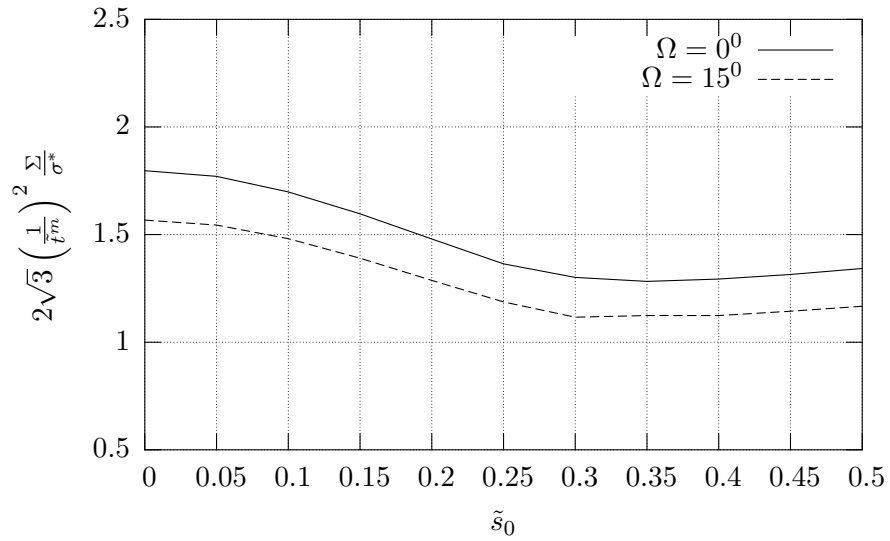


FIGURE 1.12. *Dependence of the maximum ( $\Omega = 0^\circ$ ) and the minimum ( $\Omega = 15^\circ$ ) deviatoric yield strength upon  $\tilde{s}_0$  for  $\Delta\tilde{t} = 40\%$  and  $\tilde{t}^m = 0.15$*

straight lines which correspond to an axial failure mode in the struts. Moreover, the hydrostatic yield strength decreases as  $\Delta\tilde{t}$  increases from zero (the effect is about 60% for  $\Delta\tilde{t} = 0.6$ ). The effect of  $\tilde{s}_0$  seems to be less important, i.e. for  $\Delta\tilde{t} > 0$ , the difference of strength between  $\tilde{s}_0 = 0$  and  $\tilde{s}_0 = \frac{1}{2}$  is less than 25%.

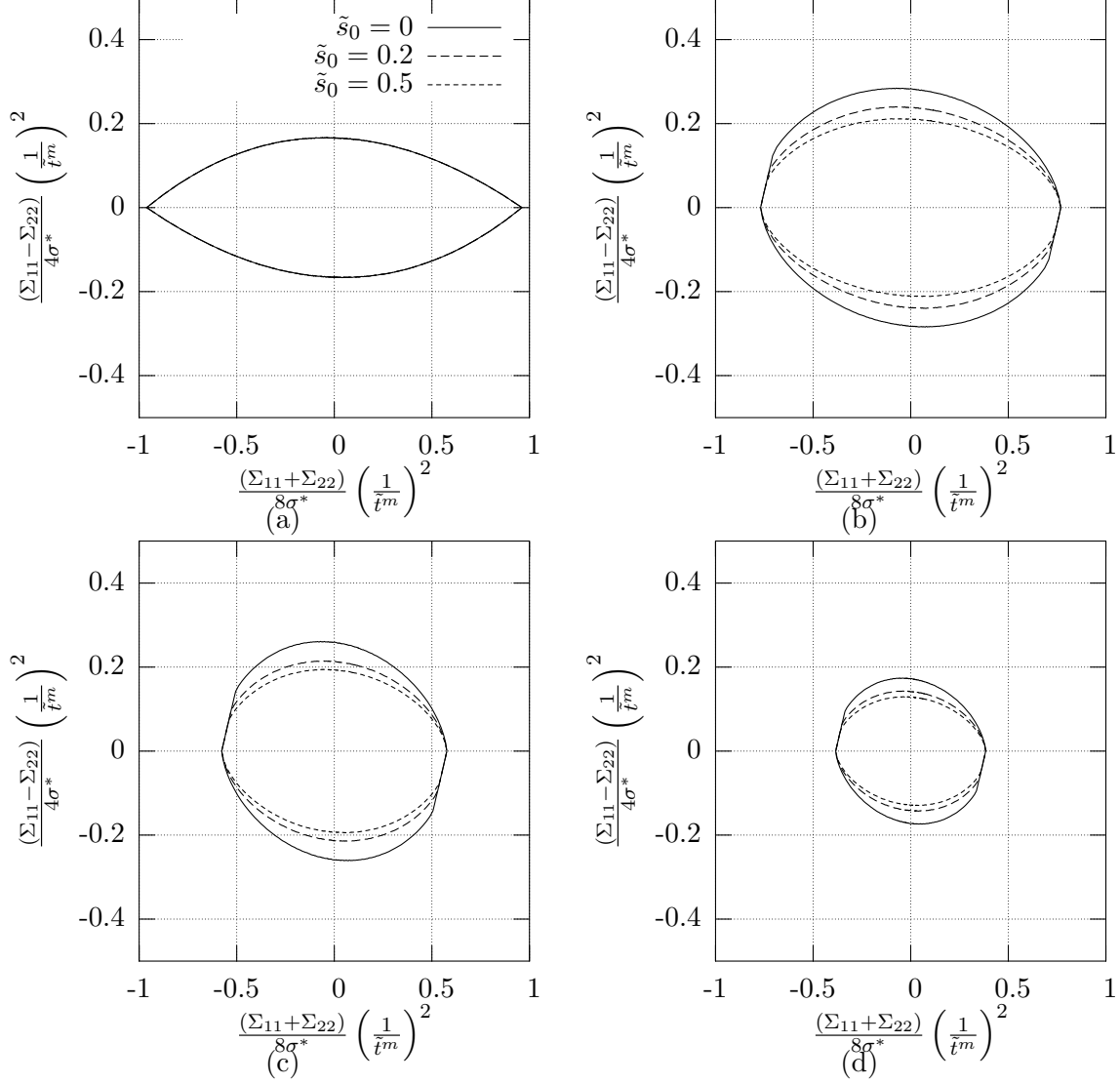


FIGURE 1.13. Yield surface for  $\tilde{t}^m = 0.15$  and selected values of  $\Delta\tilde{t}$  (a)  $\Delta\tilde{t} = 0\%$ , (b)  $\Delta\tilde{t} = 20\%$ , (c)  $\Delta\tilde{t} = 40\%$  and (d)  $\Delta\tilde{t} = 60\%$

#### 1.2.4 Comparison with finite element computations

In this section a finite element validation of the proposed analytical elasto-plastic model is conducted. Based on standard continuum homogenization techniques, the overall properties of a selected honeycomb are numerically determined by solving the corresponding unit cell problems with Cast3M software developed by the Commissariat à l'Energie Atomique (CEA) in France. The computed properties are then compared to the predictions of the proposed analytical model. The chosen anisotropic honeycomb has been already studied by [Gibson et Ashby, 1997] and [Kim et Al-Hassani, 2002]. Fig. 1.14 shows two unit cells of the material. The considered geometry

FIGURE 1.14. *Unit cells*

is described by :

$$l_3 = h, \quad l_1 = l_2 = l, \quad \theta_1 = \theta_2 = \theta, \quad t_1(s) = t_2(s) = t_3(s) = t$$

with

$$\theta = 45^\circ, \quad h/l = 2 \quad \text{and} \quad t/l = 0.1 \quad (1.57)$$

which corresponds to relative density  $\rho^* = 0.1045$ .

#### 1.2.4.1 Linear elasticity

Applying the proposed model to the determination of the overall stiffness of the material gives the following expressions for the components of the homogenized compliance tensor defined by (1.17).

$$\begin{aligned} S_{1111}^{\text{hom}} &= \frac{2}{E^* (2\frac{h}{l} \cos \theta + \sin 2\theta)} \frac{l}{t} \left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right)^2 \left( \cos^2 \theta + \left( \frac{l}{t} \right)^2 \sin^2 \theta \right) \\ S_{2222}^{\text{hom}} &= \frac{2 \cos^2 \theta}{E^* (2\frac{h}{l} \cos \theta + \sin 2\theta)} \frac{l}{t} \left( \sin^2 \theta + 2\frac{h}{l} + \left( \frac{l}{t} \right)^2 \cos^2 \theta \right) \\ S_{1122}^{\text{hom}} &= \frac{2 \cos^2 \theta}{E^* (2\frac{h}{l} \cos \theta + \sin 2\theta)} \frac{l}{t} \left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right) \sin \theta \left( 1 - \left( \frac{l}{t} \right)^2 \right) \\ S_{1212}^{\text{hom}} &= \frac{1}{2E^* (2\frac{h}{l} \cos \theta + \sin 2\theta)} \frac{l}{t} \left( \left( \frac{h}{l} \sin \theta + 1 \right)^2 + \left( \frac{h}{l} \right)^2 \left( \frac{l}{t} \right)^2 \cos^2 \theta \left( 1 + 2\frac{h}{l} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.58)$$

For the considered material with parameters (1.57), the following values are found :  $S_{1111}^{\text{hom}} = 1933/E^*$ ,  $S_{2222}^{\text{hom}} = 142/E^*$ ,  $S_{1122}^{\text{hom}} = -495/E^*$  and  $S_{1212}^{\text{hom}} = 1314/E^*$ , while the finite element results are  $S_{1111}^{FE} = 1750/E^*$ ,  $S_{2222}^{FE} = 130/E^*$ ,  $S_{1122}^{FE} = -447/E^*$  and  $S_{1212}^{FE} = 1280/E^*$ . The proposed model is softer than the finite element model : 10% for biaxial loading ( $\Sigma_{12} = 0$ ) and 3% for purely shear loading. For relative density  $\rho^* = 0.0522$ , the discrepancy is about 6% for biaxial loading and 2% for purely shear loading.

### 1.2.4.2 Strength domain

According to [Gibson et Ashby, 1997], the yield surface (plastic collapse) of this material under biaxial loading is elongated and elliptical. These authors argued that, depending on ratio  $\frac{\sigma^*}{E^*}$ , the strength domain must be truncated for compressive loading due to buckling failure mode. [Kim et Al-Hassani, 2002] argued that the yield surface must be also truncated in the tensile zone because of plastic collapse in the so-called *Mode h* which corresponds to axial yielding of the vertical beam ( $h = l_3$ ).

The strength domain  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$  is found from (1.53), (1.51) and (1.44). It is the closed convex set of  $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{12})$  defined by :

$$\begin{aligned} \left( (\sqrt{2} + 1) (\Sigma_{11} \pm \Sigma_{12}) + \frac{1}{2} \Sigma_{22} \right)^2 + 2\sigma^* \left| (\sqrt{2} + 1) \Sigma_{11} \mp \sqrt{2} \Sigma_{12} - \frac{1}{2} \Sigma_{22} \right| - \sigma^{*2} \left( \frac{t}{l} \right)^2 &\leq 0 \\ 2\Sigma_{22}^2 + 4\sqrt{2}\sigma^* |\Sigma_{12}| - \sigma^{*2} \left( \frac{t}{l} \right)^2 &\leq 0 \end{aligned} \quad (1.59)$$

Fig. 1.15 represents the yield surface in the  $\Sigma_{12} = 0$  plane. The obtained domain is consistent with the [Kim et Al-Hassani, 2002] analysis and the same truncature value for  $\Sigma_{22}$  is recovered ( $\Sigma_{22}/\sigma^* = 0.07$ ).

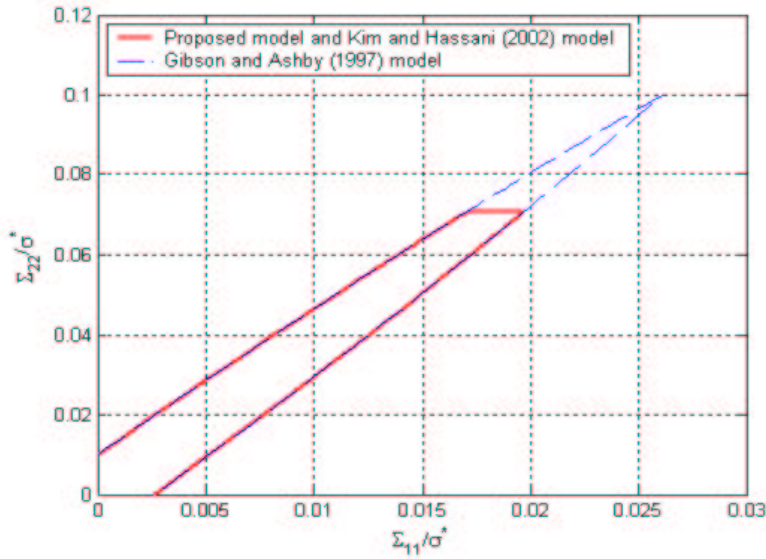


FIGURE 1.15. The ultimate yield surface for anisotropic 2D cellular material with relative density  $\rho^* = 0.1045$

### 1.2.4.3 Finite element modelling

Within the framework of finite deformation analysis and buckling analysis, it is well-known that the overall properties are dependent on the unit cell size. See, for instance, the references given in [Laroussi et al., 2002]. In this study, two unit cells are considered : the small rectangular cell of Fig. 1.14(a) which is twice larger than the minimum unit cell introduced in Fig. 1.3(b), and the large rectangular cell of Fig. 1.14(b) which corresponds to nine cells of the first type. The



unit cells of Fig. 1.14 are discretized with triangular elements (TRI3 in Cast3M : triangle with 3 nodes) in plane stress conditions.

The constitutive law of the solid material is standard elastoplasticity (no hardening) with  $\frac{\sigma^*}{E^*} = \frac{1}{1000}$  and Poisson's ratio is 0.3. Three types of numerical computations are performed :

- elastic buckling analysis,
- infinitesimal strain analysis,
- and finite deformation analysis : a defect corresponding to  $1/1000^{th}$  of the first elastic buckling mode is added to the original geometry.

Concerning boundary conditions and loading parameter, we apply the method proposed by [Triantafyllidis et Schraad, 1998]. The overall Boussinesq's stress tensor  $\underline{\underline{B}}$  is assumed to be symmetric and can be decomposed in the following form :

$$\underline{\underline{B}} = \frac{\Lambda}{|Y|} \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 \\ 0 & \sin \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}$$

with  $|Y|$  the unit cell area,  $\Lambda$  the loading parameter,  $\omega$  the orientation angle of the principal stress axes with respect to the reference coordinate system and  $\tan \phi$  the ratio of the principal macroscopic stresses.

Let  $\Delta$  denote the work conjugate quantity of  $\Lambda$ . Introducing  $\underline{\underline{F}}$ , the overall deformation gradient, the energy equation is :

$$|Y| \underline{\underline{B}} : (\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{Id}}) = \Lambda \Delta$$

The above equation reads :

$$\begin{aligned} (\cos^2 \omega \cos \phi + \sin^2 \omega \sin \phi)(F_{11} - 1) + (\sin^2 \omega \cos \phi + \cos^2 \omega \sin \phi)(F_{22} - 1) \\ + \sin \omega \cos \omega (\cos \phi - \sin \phi)(F_{12} + F_{21}) = \Delta \end{aligned} \quad (1.60)$$

Moreover,  $\underline{\underline{B}}$  can be expressed in terms of  $\underline{\underline{F}}$  and the macroscopic Cauchy stress tensor,  $\underline{\underline{\Sigma}}$  :

$$\underline{\underline{B}} = \det(\underline{\underline{F}}) \underline{\underline{\Sigma}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}}^{-1}$$

As  $\underline{\underline{\Sigma}}$  is symmetric,  $\underline{\underline{B}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}}$  is also symmetric, which gives :

$$\begin{aligned} (\sin^2 \omega \cos \phi + \cos^2 \omega \sin \phi)F_{12} - (\cos^2 \omega \cos \phi + \sin^2 \omega \sin \phi)F_{21} \\ + \sin \omega \cos \omega (\cos \phi - \sin \phi)(F_{11} - F_{22}) = 0 \end{aligned} \quad (1.61)$$

We denote by :

- $\partial Y^{i+}$  and  $\partial Y^{i-}$  the boundary face of  $Y$  respectively normal to  $\underline{e}_i$  and  $-\underline{e}_i$  with  $i = 1, 2$ .
- $x_i$  the initial size of  $Y$  in direction  $\underline{e}_i$ .
- $\underline{X}^{i+}$  and  $\underline{X}^{i-}$  the position vectors in the reference configuration of matched nodes respectively on  $\partial Y^{i+}$  and  $\partial Y^{i-}$ .
- $\underline{U}^{i+}$  and  $\underline{U}^{i-}$  the displacements of these matched nodes ;

Periodicity conditions should be of the following form :

$$\underline{U}^{i+} - \underline{U}^{i-} = (\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{Id}}) \cdot (\underline{X}^{i+} - \underline{X}^{i-})$$

where the components of  $\underline{\underline{F}}$  are unknown degrees of freedom that fulfill the conditions (1.60) and (1.61).

A reference pair of matched nodes  $(\underline{X}_{ref}^{i+}, \underline{X}_{ref}^{i-})$  is fixed on boundary faces  $(\partial Y^{i+}, \partial Y^{i-})$  with  $i = 1, 2$ . The components of  $\underline{\underline{F}}$  can be expressed in terms of the displacements of these nodes :

$$\begin{aligned}
F_{11} &= 1 + \frac{U_{1ref}^{1+} - U_{1ref}^{1-}}{x_1} \\
F_{12} &= \frac{U_{1ref}^{2+} - U_{1ref}^{2-}}{x_2} \\
F_{21} &= \frac{U_{2ref}^{1+} - U_{2ref}^{1-}}{x_1} \\
F_{22} &= 1 + \frac{U_{2ref}^{2+} - U_{2ref}^{2-}}{x_2}
\end{aligned}$$

The special case of biaxial loading,  $\omega = 0$ , is important. Substituting the above expressions in (1.60) and (1.61), the following boundary conditions are obtained :

– Matched reference nodes :

$$\begin{cases} \cos \phi \frac{U_{1ref}^{1+} - U_{1ref}^{1-}}{x_1} + \sin \phi \frac{U_{2ref}^{2+} - U_{2ref}^{2-}}{x_2} = \Delta \\ \sin \phi \frac{U_{1ref}^{2+} - U_{1ref}^{2-}}{x_2} - \cos \phi \frac{U_{2ref}^{1+} - U_{2ref}^{1-}}{x_1} = 0 \end{cases}$$

– Other matched nodes at  $(\partial Y^{i+}, \partial Y^{i-})$ , with  $i = 1, 2$  :

$$(\underline{U}^{i+} - \underline{U}^{i-}) - (\underline{U}_{ref}^{i+} - \underline{U}_{ref}^{i-}) = 0$$

In addition to the above conditions, the displacements of one choosen node must be fixed in order to avoid rigid translations.

#### 1.2.4.4 Results

A typical normalized stress-strain  $(\frac{\Lambda}{|Y|_{\sigma^*}}, \Delta)$  diagram, obtained from the above described finite deformation analysis for  $\rho^* = 0.1045$  and  $\phi = 0$ , is shown in Fig. 1.16.

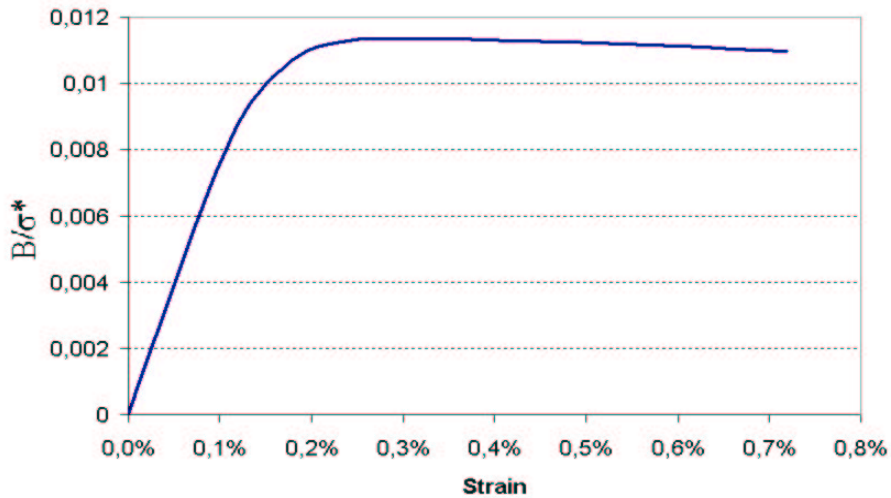


FIGURE 1.16. Stress-strain diagram for  $\rho^* = 0.1045$  and  $\phi = 0$

The plastic collapse occurs in the infinitesimal strain regime and buckling occurs after the stress peak for compressive loading. Several loading orientations have been considered. For each orientation  $\phi$ , the force peak  $\Lambda$  is computed and the corresponding stress is reported in the  $(B_{11}/\sigma^*, B_{22}/\sigma^*)$  plane, which coincides in the infinitesimal strain regime with the  $(\Sigma_{11}/\sigma^*, \Sigma_{22}/\sigma^*)$  plane. Fig. 1.17 shows a good agreement between the theoretical and numerical yield surfaces. Since plastic collapse occurs at small deformations, it is interesting to perform the analysis in the infinitesimal strain regime. Fig. 1.17 shows that the results of the infinitesimal strain analysis are also in good agreement with the analytical model. The scatter between infinitesimal strain analysis and finite deformation analysis is maximum in the diagonal direction, near the horizontal limit in the compression domain ( $\Sigma_{11} \leq 0$  and  $\Sigma_{22} \leq 0$ ). Moreover, it was verified that both unit cells of Fig. 1.14 lead to the same numerical yield surface. This confirms that buckling is not relevant in the determination of the collapse surface of the considered honeycomb.

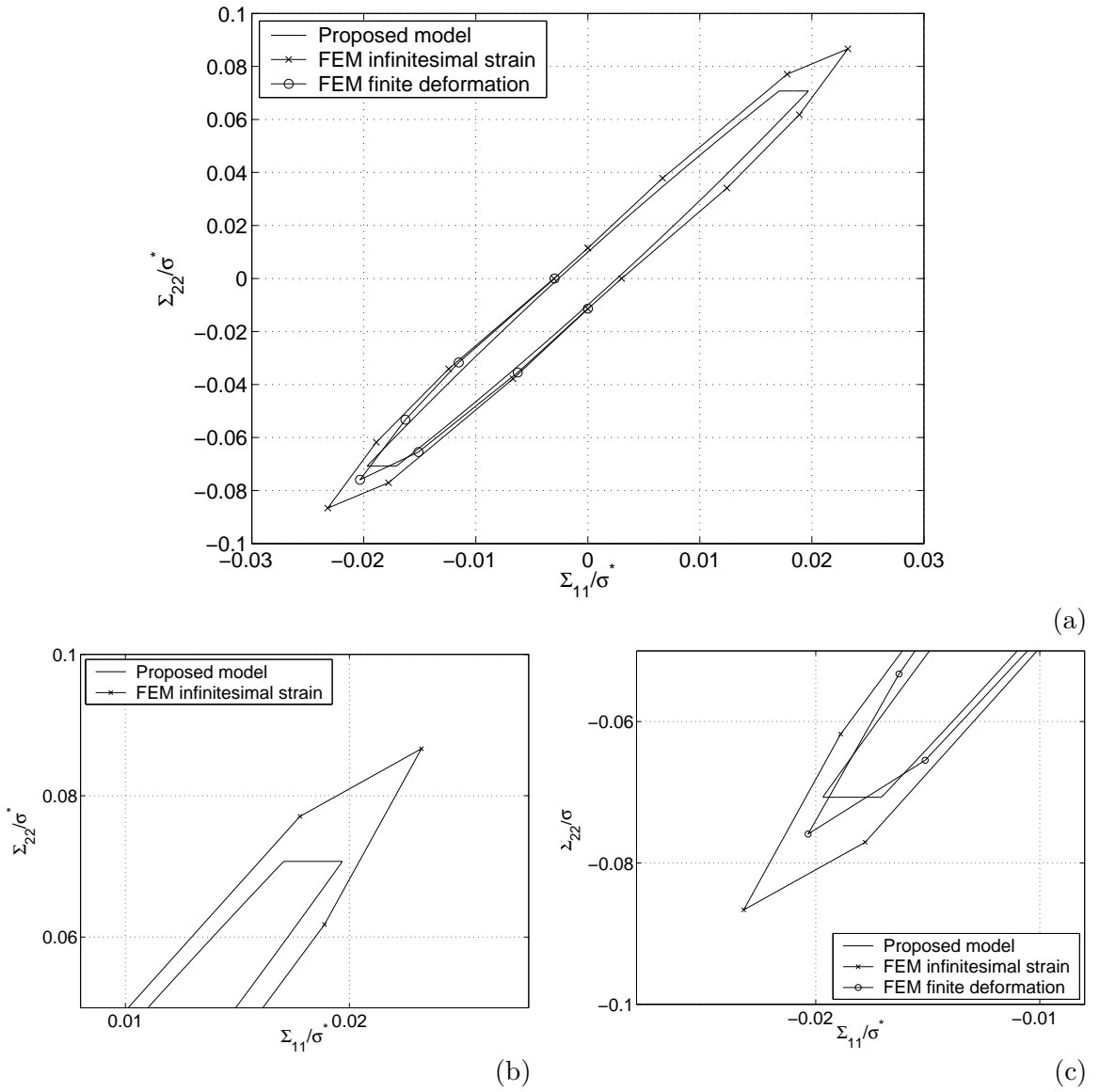


FIGURE 1.17. (a) Numerical validation of the ultimate yield surface for anisotropic 2D cellular material with relative density  $\rho^* = 0.1045$ , (b) Zoom on the domain  $(\Sigma_{11} \geq 0.008\sigma^*, \Sigma_{22} \geq 0.05\sigma^*)$  and (c) Zoom on the domain  $(\Sigma_{11} \leq -0.008\sigma^*, \Sigma_{22} \leq -0.05\sigma^*)$

This correlates with the results of [Papka et Kyriakides, 1998] who conducted crushing experiments on aluminium honeycomb ( $\frac{\sigma^*}{E^*} = 0.0042$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = 40^\circ$ ,  $\frac{h}{t} = 0.72$ ,  $\frac{t_1}{t} = \frac{t_2}{t} = 0.023$ ,  $t_3 = 2t_1 = 2t_2$ ) and showed numerically and experimentally that buckling occurs after the peak stress. The horizontal line in Fig. 1.18 represents the value of the ultimate strength calculated with the proposed analytical model, which does not take into account the geometric nonlinearities. The proposed model predicts with good accuracy the experimental plateau value.

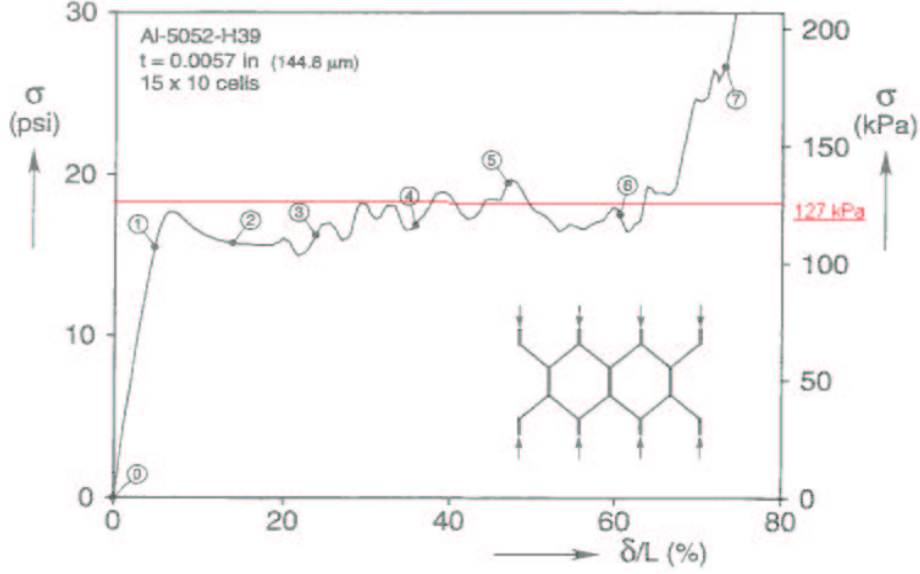


FIGURE 1.18. *Comparison of the proposed model with load-displacement response from a crushing experiment on aluminum honeycomb by (Papka and Kyriakides, 1997)*

## Conclusion

This paper presents a rigorous method for the homogenization of general elastoplastic periodic lattices and its application to hexagonal cellular materials. After recalling the definition of general periodic structures in terms of  $n$ -type lattices, we introduce the set of all kinematically admissible deformation fields  $\mathcal{KA}$  and the set of all statically admissible periodic interactions  $\mathcal{SA}$ . The duality between the kinematic and the static approaches is described in details. Thereby, the overall stiffness and strength of the lattice is determined by solving unit cell problems with finite number of degrees of freedom. Since the kinematic method was presented previously, we propose in this paper a static approach. The determination of the conjugate energy leads to the expression of the homogenized overall elastic tensor  $\underline{\underline{A}}^{\text{hom}}$ . As for studying the overall strength domain, the homogenization method is extended to the limit analysis. Static approach is proposed and kinematic method is also obtained by duality.

This general method is applied to metallic honeycomb materials. It seems to be very efficient because it is systematic and simple to implement. For hexagonal cells with arbitrary geometry and material distribution, the set  $\mathcal{SA}$  is a two-dimensional space. In the case of elastic behaviour, the unknown bending moments are determined by minimizing energy, and the overall elastic constants are easily deduced. Overall strength domain is completely defined by five inequalities.

To validate our model, we choose particular geometry investigated in previous published papers. Already known results are re-derived in a simple manner. This paper also provides new results corresponding to non-symmetric material distribution in the cell edges of the honeycomb. The

model shows that the effects of this type of defect on the overall properties is much less important than the already known effects of symmetric non-uniform cell wall thickness. Finally, the model is validated by comparison with the finite element results. Although our approach does not take into account the geometrical nonlinearities, there is a good agreement between our analytical results and the finite element analysis, which depends on the geometrical nonlinearities. As a matter of fact, for these materials, instabilities, such as buckling, occur after reaching the maximum plastic load.

The present paper describes a new method of hexagonal lattices homogenization in 2D. However, the authors have introduced an extension which concerns the behaviour of 3D Kelvin lattice [Florence et Sab, 2005].



## Chapitre 2

# Domaine de résistance de matériaux périodiques de cellule de base tridimensionnelle avec une distribution de matière non uniforme

Ce chapitre reprend l'intégralité d'un article écrit en collaboration avec Karam SAB et publié dans *Journal of Materials Science*.

Il est consacré à l'application du modèle présenté dans le chapitre précédent à des structures cellulaires tridimensionnelles de type mousse à porosité ouverte. La géométrie de la cellule choisie correspond à un tétrakaidécaèdre, car ce polyèdre est le moyen le plus efficace pour une partition de l'espace tridimensionnel. Suivant la même démarche que celle utilisée pour une cellule bidimensionnelle, le domaine de résistance de ces matériaux est déterminé en résolvant le problème auxiliaire sur une maille permettant de reproduire par périodicité le matériau complet.

Après un bref rappel de la méthode proposée dans le cas général (section 1), nous présentons dans la seconde section les simplifications du problème qui peuvent être faites lorsque le matériau présente une ou plusieurs symétries.

Cette méthode a l'avantage d'être adaptée à l'introduction d'une distribution de matériaux non uniforme et non symétrique le long des poutres constituant le réseau. Nous avons ainsi pu étudier l'influence de ce type de défaut, tout d'abord sur le domaine de résistance d'une poutre seule (section 3), puis sur celui du matériau périodique tridimensionnel considéré (section 4). Les résultats montrent que la distribution de matériau non uniforme augmente la force globale, sauf dans des directions de charge particulières et que la non symétrie n'a pas d'influence significative sur la surface de rupture.

## Overall ultimate yield surface of periodic tetrakaidecahedral lattice with non-symmetric material distribution

Céline FLORENCE and Karam SAB<sup>1</sup>

*Institut Navier. LAMI - Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 6 et 8 avenue Blaise Pascal,  
Cité Descartes. Champs-sur-Marne. 77455 Marne-la-Vallée Cedex 2. France.*

A rigorous method for the homogenization of general elastoplastic periodic lattices is applied to 3D cellular solids. Tetrakaidecahedral unit cell problems are solved to determine the overall yield surface of foams. Non-symmetric material distribution is introduced and new results concerning the influence of this type of defect are obtained. They show that non-uniform material distribution increases the overall strength, except in particular loading directions and that non-symmetry has no significant influence on the yield surface.

**Key-words :** periodic lattices, ultimate yield surface, homogenization, open-cell solid foams.

## Introduction

Since the pioneering work on the mechanics of cellular solids by [Gent et Thomas, 1963] as well as by [Patel et Finnie, 1970] appeared, much work has been performed to an appropriate modelling of the effective elastic-perfectly plastic behavior of solid foams. Comprehensive treatises on elastic-perfectly plastic of solid foams are found in textbooks such as the well-known work by [Gibson et Ashby, 1997]. Using simple beam theory, [Klintworth et Stronge, 1988] proposed failure envelopes for regular honeycombs with respect to various elastic and plastic cell crushing modes. [Gibson et al., 1989] studied the biaxial yield surface of 2-dimensional honeycombs and the triaxial yield surface of 3-dimensional open-celled foams. In most of these studies, an upper bound on the plastic collapse stress is given by equating the work done by the applied stress to the plastic work done at the hinges corresponding to the considered collapse mode. More recently, [Kim et Al-Hassani, 2002] developed an anisotropic hexagonal model to show the effects of strut morphology on plastic yield surface. [Chen et al., 1999] studied the influence of six different types of geometrical imperfection on the ultimate strength of 2D cellular solids. In these both cases, studied defects are symmetric and all the nodes of the lattice have the same weight.

The homogenization of periodic cellular solids with general cellular geometry and topology has been already presented in [Florence et Sab, 2005] and applied to 2D cellular solids with non-symmetric material distribution. The overall yield surface of cellular materials seen as periodic lattices of elastic-perfectly plastic beams that are rigidly connected in vertices is determined by solving a discrete yield design problem attached to the unit cell. This homogenization approach extends to limit analysis the method which has been previously presented in [Sab, 1996], [Pradel et Sab, 1998], [Pradel, 1998] and [Laroussi et al., 2002], for elastic lattices.

The purpose of this work is to extend to 3D lattices the analysis for 2D cellular solids presented in [Florence et Sab, 2005]. The outline is as follows. Presented in section 2 is a summary of the general homogenization method proposed in [Florence et Sab, 2005]. In section 3, the symmetry of lattices is studied and used to simplify the unit cell problem. Section 4 is dedicated to the identification of the overall strength of a 3D Euler-Bernoulli beam with non-uniform section.

<sup>1</sup>corresponding author. E-mail : sab@lami.enpc.fr



Then, the discrete unit cell problem is set and solved in section 5, for the determination of the overall strength properties of a tetrakaidecahedral lattice. The influence of non-symmetric defects is studied. The presentation is then concluded in section 6 with a short summary of the results.

## 2.1 The static homogenization method for yield design of periodic discrete media

The purpose of this section is to recall the static method for the determination of the macroscopic strength domain of general periodic lattices. Cellular materials seen as periodic lattices of beams that are rigidly connected in vertices will be considered in this paper. For these materials, particles are vertices of the lattice and interacting particles are couples of vertices which are connected by a beam element. The static method, which has been presented in [Florence et Sab, 2005] and applied to honeycomb materials, is based on the resolution of a unit cell problem involving a finite number of periodic interaction forces and moments between the particles of the lattice. One can find in [Chateau et al., 2002] a similar approach in the context of homogenization for granular materials. It is a generalization of the well-known homogenization method for the determination of the macroscopic strength domain of a continuum heterogeneous material which has been initially developed by [Suquet, 1983], [De Buhan, 1986] and [Bouchitté, 1987] for periodic media, and by [Sab, 1994] for random media.

Particles  $P^{\alpha,i}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Z}^3$ ,  $i = 1, \dots, n$ , of the so-called  $n$ -type lattice are generated by periodicity with  $n$  particles as follows :

$$\forall i = 1, \dots, n, \forall \alpha \in \mathbb{Z}^3, \\ \underline{X}^{\alpha,i} = \underline{X}^{0,i} + \alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \alpha_3 \underline{a}_3$$

where  $\underline{X}^{\alpha,i}$  is the coordinates vector of  $P^{\alpha,i}$  in the reference configuration, and  $\underline{a}_1$ ,  $\underline{a}_2$  and  $\underline{a}_3$  are three vectors forming a base in the 3-dimensional Euclidean space.  $|Y| = |\det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)|$  denotes the volume of the parallelepipedic cell constructed from this base, and  $\mathcal{P}$  denotes the set of all particles of the lattice. It is assumed that, for every particle  $P \in \mathcal{P}$ , there exists a unique couple of  $\alpha \in \mathbb{Z}^3$  and  $i = 1, \dots, n$  such that  $P = P^{\alpha,i}$ .

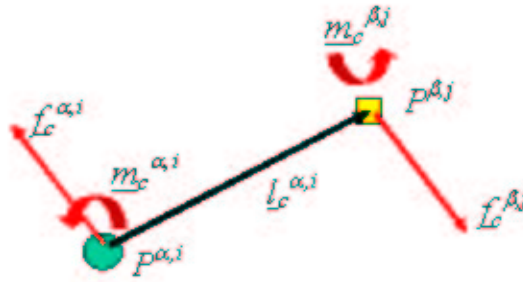


FIGURE 2.1. Interaction forces and moments

Let  $c = \{P^{\beta,j}, P^{\alpha,i}\}$  be an interacting couple of particles :  $\underline{f}_c^{\alpha,i}$  (resp.  $\underline{f}_c^{\beta,j}$ ) is the force exerted by particle  $P^{\beta,j}$  (resp.  $P^{\alpha,i}$ ) on particle  $P^{\alpha,i}$  (resp.  $P^{\beta,j}$ ), and  $\underline{m}_c^{\alpha,i}$  (resp.  $\underline{m}_c^{\beta,j}$ ) is the moment at point  $\underline{X}^{\alpha,i}$  (resp.  $\underline{X}^{\beta,j}$ ) exerted by particle  $P^{\beta,j}$  (resp.  $P^{\alpha,i}$ ) on particle  $P^{\alpha,i}$  (resp.  $P^{\beta,j}$ ). Fig. 2.1. The interaction forces and moments of couple  $c$ , noted

$$I_c = \left\{ \underline{f}_c^{\beta,j}, \underline{m}_c^{\beta,j}, \underline{f}_c^{\alpha,i}, \underline{m}_c^{\alpha,i} \right\}$$

are self-balanced :

$$\begin{aligned} \underline{f}_c^{\alpha,i} + \underline{f}_c^{\beta,j} &= 0 \\ \underline{m}_c^{\alpha,i} + \underline{m}_c^{\beta,j} - \underline{f}_c^{\alpha,i} \wedge \underline{l}_c^{\alpha,i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

or, equivalently,

$$\begin{aligned} \underline{f}_c^{\alpha,i} + \underline{f}_c^{\beta,j} &= 0 \\ \underline{\widehat{m}}_c^{\alpha,i} + \underline{\widehat{m}}_c^{\beta,j} &= 0 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \underline{l}_c^{\alpha,i} &= \underline{X}^{\beta,j} - \underline{X}^{\alpha,i} \\ \underline{l}_c^{\beta,j} &= \underline{X}^{\alpha,i} - \underline{X}^{\beta,j} = -\underline{l}_c^{\alpha,i} \end{aligned}$$

are the branch vectors, and  $\underline{\widehat{m}}_c^{\alpha,i}$  (resp.  $\underline{\widehat{m}}_c^{\beta,j}$ ) is the moment at the mid-point of  $P^{\alpha,i}$  and  $P^{\beta,j}$  which is exerted by particle  $P^{\beta,j}$  (resp.  $P^{\alpha,i}$ ) on particle  $P^{\alpha,i}$  (resp.  $P^{\beta,j}$ ).

$$\begin{aligned} \underline{\widehat{m}}_c^{\alpha,i} &= \underline{m}_c^{\alpha,i} - \frac{1}{2} \underline{f}_c^{\alpha,i} \wedge \underline{l}_c^{\alpha,i} \\ \underline{\widehat{m}}_c^{\beta,j} &= \underline{m}_c^{\beta,j} - \frac{1}{2} \underline{f}_c^{\beta,j} \wedge \underline{l}_c^{\beta,j} \end{aligned}$$

Depending on the orientation of couple  $c$ , which must be fixed once for all, the branch vector  $\underline{l}_c$  and the generalized stress  $(\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c)$  associated to  $c$  can be equivalently defined as :

$$\begin{aligned} &\left\{ \underline{l}_c^{\alpha,i} = \underline{l}_c, \left( \underline{f}_c^{\alpha,i} = \underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c^{\alpha,i} = \underline{\widehat{m}}_c \right) \right\} \\ \text{or } &\left\{ \underline{l}_c^{\beta,j} = \underline{l}_c, \left( \underline{f}_c^{\beta,j} = \underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c^{\beta,j} = \underline{\widehat{m}}_c \right) \right\} \end{aligned}$$

It will be assumed in the sequel that  $\mathcal{C}$ , the set of interacting couples of particles, is generated by periodicity with  $r$  couples noted  $\{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ . More precisely, for  $\gamma \in \mathbb{Z}^3$  and  $c = \{P^{\beta,j}, P^{\alpha,i}\}$ , let  $c^\gamma = \{P^{\beta+\gamma,j}, P^{\alpha+\gamma,i}\}$  denote the interacting couple of particles obtained by  $\gamma$ -translation of  $c$ . Then,

$$\mathcal{C} = \{c_k^\gamma, k = 1, \dots, r, \gamma \in \mathbb{Z}^3\}$$

It is assumed that for every  $c$  in  $\mathcal{C}$ , there exists a unique couple of  $\gamma \in \mathbb{Z}^3$  and  $k = 1, \dots, r$  such that  $c = c_k^\gamma$ .

In the absence of external forces and moments, the balance equation at particle  $P^{\alpha,i}$  writes :

$$\sum_{c \in \mathcal{C}} \underline{f}_c^{\alpha,i} = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{c \in \mathcal{C}} \underline{m}_c^{\alpha,i} = 0 \quad (2.2)$$

In the above summations,  $\underline{f}_c^{\alpha,i}$  and  $\underline{m}_c^{\alpha,i}$  are zero if particle  $P^{\alpha,i}$  is not one of the two particles of  $c$ .

The orientations of all interacting couples being fixed once for all, and at every interacting couple of particles  $c$  in  $\mathcal{C}$ , the closed nonempty convex domain of  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ,  $G^c$ , characterizing the strength capacities of this couple, is introduced :

$$(\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c) \in G^c$$

Let  $\Gamma$  denotes the application which associates  $G^c$  to every oriented couple  $c$  in  $\mathcal{C}$ . Assuming the periodicity of this application :

$$G_k^\gamma = G^{c_k} \text{ for all } k \text{ and all } \gamma$$

it is possible to replace in the structural analysis the periodic lattice by a homogeneous continuum "effective" material with yet unknown strength domain. The task of the homogenization analysis is the determination of the macroscopic strength domain of the effective material.

For periodic interaction forces and moments in the infinite lattice such that

$$I_{c_k}^\gamma = I_{c_k} \text{ for all } k \text{ and all } \gamma, \quad (2.3)$$

the balance equations (2.2) at particles  $P^{\alpha,i}$  and  $P^{0,i}$  are the same. Moreover,  $k$  and  $i$  being fixed, there exists at most one  $\gamma \in \mathbb{Z}^3$  such that  $P^{0,i}$  is one of the two particles of  $c_k^\gamma$ , and in this case  $\left(\underline{f}_{c_k^\gamma}^{0,i}, \underline{m}_{c_k^\gamma}^{0,i}\right)$  is noted  $\left(\underline{f}_k^i, \underline{m}_k^i\right)$ . Otherwise,  $\left(\underline{f}_k^i, \underline{m}_k^i\right)$  is zero. Hence, (2.2) writes, for  $i = 1, \dots, n$  :

$$\sum_{k=1, \dots, r} \underline{f}_k^i = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{k=1, \dots, r} \underline{m}_k^i = 0 \quad (2.4)$$

Let  $\underline{\underline{\Sigma}}$  be the overall symmetric second order stress tensor applied to the infinite lattice. The set of statically admissible periodic interactions forces and moments associated to  $\underline{\underline{\Sigma}}$  is :

$$\mathcal{SA}(\underline{\underline{\Sigma}}) = \left\{ (I_c)_{c \in \mathcal{C}} / (2.3), (2.4) \text{ and } \underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{|Y|} \sum_{k=1, \dots, r} \underline{f}_{c_k} \otimes^s \underline{l}_{c_k} \right\} \quad (2.5)$$

where  $(\underline{a} \otimes^s \underline{b})_{ij} = \frac{1}{2} (a_i b_j + a_j b_i)$  is the symmetric part of the dyadic product of  $\underline{a}$  and  $\underline{b}$ .

The macroscopic strength domain, denoted by  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$ , is the convex domain of macroscopic stress states  $\underline{\underline{\Sigma}}$  such that there exists a periodic distribution of interaction forces and moments  $(I_c)_{c \in \mathcal{C}}$  in  $\mathcal{SA}(\underline{\underline{\Sigma}})$ , with  $\left(\underline{f}_{c_k}, \underline{\widehat{m}}_{c_k}\right)$  in  $G^{c_k}$  for all  $k$  :

$$\mathcal{G}^{\text{hom}} = \left\{ \underline{\underline{\Sigma}} / \exists (I_c)_{c \in \mathcal{C}} \in \mathcal{SA}(\underline{\underline{\Sigma}}), \right. \\ \left. \left(\underline{f}_{c_k}, \underline{\widehat{m}}_{c_k}\right) \in G^{c_k} \text{ for all } k \right\} \quad (2.6)$$

## 2.2 Material symmetry

As it has been seen above, the lattice is completely characterized by  $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \Gamma)$  and the determination of  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$  requires the resolution of the unit cell problem (2.6). When the periodic lattice possesses a material symmetry property, the number of unknowns to be determined can be reduced as follows. Let  $\underline{\underline{Q}}$  be an orthogonal second order tensor :  $\underline{\underline{Q}}^{-1} = {}^t \underline{\underline{Q}}$ . For  $\det(\underline{\underline{Q}})$  equal to  $+1$ ,  $\underline{\underline{Q}}$  is a rotation on  $\mathbb{R}^3$ . The image by  $\underline{\underline{Q}}$  of particle  $P \in \mathcal{P}$  of coordinates vector  $\underline{X}$  is particle  $P^\sharp$  of coordinates vector  $\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{X}$ .  $\mathcal{P}^\sharp = \{P^\sharp, P \in \mathcal{P}\}$  denotes the image of  $\mathcal{P}$  by  $\underline{\underline{Q}}$ . Similarly, the images  $c^\sharp$  and  $\mathcal{C}^\sharp$  of  $c \in \mathcal{C}$  and  $\mathcal{C}$  are respectively defined. By definition of  $G^{c^\sharp}$ ,  $\left(\underline{f}_{c^\sharp}, \underline{\widehat{m}}_{c^\sharp}\right) \in G^{c^\sharp} \Leftrightarrow \left(\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c\right) \in G^c$ , where  $\underline{f}_{c^\sharp} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{f}_c$  and  $\underline{\widehat{m}}_{c^\sharp} = \det(\underline{\underline{Q}}) \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\widehat{m}}_c$  are the images of the force vector and the moment

pseudo-vector associated to  $c$ , respectively. It can be easily seen from (2.6) that the macroscopic strength domain  $(\mathcal{G}^{\text{hom}})^{\sharp}$  associated to  $(\mathcal{P}^{\sharp}, \mathcal{C}^{\sharp}, \Gamma^{\sharp})$  is such that  $\underline{\underline{\Sigma}}^{\sharp} \in (\mathcal{G}^{\text{hom}})^{\sharp} \Leftrightarrow \underline{\underline{\Sigma}} \in \mathcal{G}^{\text{hom}}$  where  $\underline{\underline{\Sigma}}^{\sharp} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot {}^t\underline{\underline{Q}}$  is the image of  $\underline{\underline{\Sigma}}$ . Moreover,  $(I_c)_{c \in \mathcal{C}}$  is associated to  $\underline{\underline{\Sigma}} \in \mathcal{G}^{\text{hom}}$  by (2.6) if, and only if, its image  $(I_c^{\sharp})_{c^{\sharp} \in \mathcal{C}^{\sharp}}$  is associated to  $\underline{\underline{\Sigma}}^{\sharp} \in (\mathcal{G}^{\text{hom}})^{\sharp}$ . By definition,  $\underline{\underline{Q}}$  is a material symmetry of the periodic lattice if  $(\mathcal{P}^{\sharp}, \mathcal{C}^{\sharp}, \Gamma^{\sharp}) = (\mathcal{P}, \mathcal{C}, \Gamma)$ . It results that  $(\mathcal{G}^{\text{hom}})^{\sharp} = \mathcal{G}^{\text{hom}}$ , which means that  $\underline{\underline{\Sigma}}$  is in  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$  if, and only if, its image  $\underline{\underline{\Sigma}}^{\sharp}$  is in  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$ . Now, if the material symmetry  $\underline{\underline{Q}}$  is such that  $\underline{\underline{Q}}^{(m)} = \text{Identity}$ , then for invariant  $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^{\sharp}$ , one can restrict the analysis in (2.6) to invariant periodic forces and moments. Indeed let  $(I_c)_{c \in \mathcal{C}}$  be associated to  $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^{\sharp}$ . Define  $(I_c^b)_{c \in \mathcal{C}}$  as the arithmetic average of  $(I_c)_{c \in \mathcal{C}}$  and its images by  $\underline{\underline{Q}}, \underline{\underline{Q}}^{(2)}, \dots, \underline{\underline{Q}}^{(m-1)}$ . Obviously,  $(I_c^b)_{c \in \mathcal{C}}$  is in  $\mathcal{SA}(\underline{\underline{\Sigma}})$  and it is invariant with respect to  $\underline{\underline{Q}}$ . In addition,  $(\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c)$  and all its images being in  $G^c$ ,  $(\underline{f}_c^b, \underline{\widehat{m}}_c^b)$  is also in  $G^c$  by convexity. Therefore,  $(I_c^b)_{c \in \mathcal{C}}$  can be associated to  $\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^{\sharp}$  in (2.6).

## 2.3 Ultimate yield strength of non-uniform 3D beam

Contained in this section is a discussion concerning the yield strength which is associated to a current beam of the lattice :  $G^c$  is computed in terms of the geometry and the material properties of the beam.

### 2.3.1 General 3D Euler-Bernouilli beam model

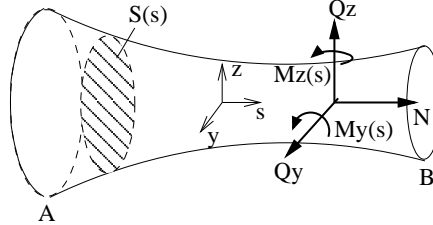


FIGURE 2.2. Beam with non-uniform thickness

Consider a beam of length  $l$  and non-uniform section  $S(s)$  with  $-\frac{l}{2} \leq s \leq \frac{l}{2}$ , as shown in Fig. 2.2. Under the action of the forces and moments at the ends of the beam (i.e., at points  $A : s = -\frac{l}{2}$ , and  $B : s = \frac{l}{2}$  in Fig. 2.2), it is assumed that the axial stress  $\sigma_{ss}(s, y, z)$  is the only non negligible stress component. The axial force  $N(s)$  and the bending moments  $M_y(s)$  and  $M_z(s)$  are :

$$N(s) = \int_{S(s)} \sigma_{ss}(s, y, z) dy dz \quad (2.7)$$

$$M_y(s) = \int_{S(s)} z \sigma_{ss}(s, y, z) dy dz \quad (2.8)$$

$$M_z(s) = \int_{S(s)} -y \sigma_{ss}(s, y, z) dy dz \quad (2.9)$$

The balance equation imposes :

$$N(s) = N \quad (2.10)$$

$$M_y(s) = \overline{M}_y + sQ_z \quad (2.11)$$

$$M_z(s) = \overline{M}_z - sQ_y \quad (2.12)$$

where  $Q_y$  and  $Q_z$  are the shear forces, and  $\overline{M}_y$  and  $\overline{M}_z$  are the bending moment at the mid-point of the beam ( $s = 0$ ).

The branch vector and the generalized stress associated to couple  $c = \{A, B\}$ , which is oriented from  $A$  to  $B$ , are

$$\underline{l}_c = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{f}_c = \begin{pmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}, \quad \underline{\widehat{m}}_c = \begin{pmatrix} T \\ \overline{M}_y \\ \overline{M}_z \end{pmatrix}$$

where  $T$  is torsion.

The strength criterion writes :

$$|\sigma_{ss}(s, y, z)| \leq \sigma^* \quad (2.13)$$

where  $\sigma^*$  is the tensile yield stress. The ultimate yield strength domain of the beam,  $G^c$ , is the convex set of generalized stress  $(\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c) = (N, Q_y, Q_z, T, \overline{M}_y, \overline{M}_z)$  such that there exists  $\sigma_{ss}(s, y, z)$  satisfying (2.7-2.11-2.12) for all  $s$ , and (2.13) for all  $(s, y, z)$ . Of interest is the special case where  $(s, y)$  is a plane of material symmetry of the beam :  $(y, z) \in S(s) \Leftrightarrow (y, -z) \in S(s)$ , for all  $(s, y, z)$ .

Using uniaxial stress field  $\sigma_{ss}^\sharp(s, y, z) = \sigma_{ss}(s, y, -z)$ , it is easy to see that :  $(\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c) \in G^c \Leftrightarrow (\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c)^\sharp \in G^c$ , where  $(\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c)^\sharp = (N, Q_y, -Q_z, -T, -\overline{M}_y, \overline{M}_z)$  is the image of  $(\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c)$  by  $(s, y)$ -plane symmetry.

Moreover, using  $\sigma_{ss}^b(s, y, z) = \frac{1}{2}(\sigma_{ss}^\sharp(s, y, z) + \sigma_{ss}(s, y, z))$ , it is clear that :  $(\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c) \in G^c \Rightarrow (\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c)^b \in (G^c)^b$ , where  $(\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c)^b = (N, Q_y, 0, 0, 0, \overline{M}_z) = \frac{1}{2}((\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c) + (\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c)^\sharp)$  is the  $(s, y)$ -plane projection of  $(\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c)$ , and  $(G^c)^b \subset G^c$  is the subset of  $(\underline{f}_c, \underline{\widehat{m}}_c)$  in  $G^c$  such that the corresponding uniaxial stresses verify  $\sigma_{ss}^b = \sigma_{ss}$ .

The characterization of  $(G^c)^b$  follows the method proposed by [Florence et Sab, 2005] for 2D beams. For any couple of real numbers  $(\epsilon, \chi)$ , and for fixed  $s$ , the support function,  $p(\epsilon, \chi; s)$ , of the convex set of  $(N(s), M_z(s))$  such that there exists  $\sigma_{ss}$  satisfying (2.7-2.8-2.9) and  $\sigma_{ss}^b = \sigma_{ss}$  is introduced :

$$\begin{aligned} \epsilon N(s) + \chi M_z(s) &= \int_{S(s)} (\epsilon - \chi y) \sigma_{ss}(s, y, z) dy dz \\ &\leq \sigma^* \int_{S(s)} |\epsilon - \chi y| dy dz \equiv p(\epsilon, \chi; s) \end{aligned} \quad (2.14)$$

For  $\chi = 0$ , (2.14) is equivalent to  $|N(s)| \leq |S(s)|\sigma^*$ , where  $|S(s)|$  is the area of section  $S(s)$ . For  $\chi \neq 0$ , one can divide by  $|\chi|$  both members of inequality (2.14). Moreover, the limit case  $\epsilon \rightarrow \pm\infty$  provides also  $|N(s)| \leq A(s)\sigma^*$ . This means that inequality (2.14) can be restricted without loss of generality to  $\chi = \pm 1$ .

Introducing the following notations :

$$-\frac{1}{2} \leq \tilde{s} = \frac{s}{l} \leq \frac{1}{2}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{l}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{l} \quad (2.15)$$

$$\tilde{N} = \frac{N}{l^2 \sigma^*}, \quad \tilde{Q} = \frac{Q_y}{l^2 \sigma^*}, \quad \tilde{M} = \frac{\overline{M}_z}{l^3 \sigma^*}$$

and optimizing (2.14) for  $\chi = \pm 1$  over all  $\epsilon$  and all  $\tilde{s}$ , it is found that  $(G^c)^\flat$  is completely characterized by :

$$-g(-\tilde{N}, -\tilde{Q}) \leq \tilde{M} \leq g(\tilde{N}, \tilde{Q}) \quad (2.16)$$

where

$$g(\tilde{N}, \tilde{Q}) = \inf_{\tilde{\epsilon} \in \mathbb{R}, |\tilde{s}| \leq \frac{1}{2}} \left\{ \int_{\tilde{S}(\tilde{s})} |\tilde{\epsilon} - \tilde{y}| d\tilde{y} d\tilde{z} - \tilde{\epsilon} \cdot \tilde{N} + \tilde{s} \cdot \tilde{Q} \right\} \quad (2.17)$$

If  $(s, z)$  is a plane of material symmetry of the beam :  $(y, z) \in S(s) \Leftrightarrow (-y, z) \in S(s)$ , for all  $(s, y, z)$ , then  $g(\tilde{N}, \tilde{Q}) = g(-\tilde{N}, \tilde{Q})$ . If  $(y, z)$  is a plane of material symmetry of the beam :  $(y, z) \in S(s) \Leftrightarrow (y, z) \in S(-s)$ , for all  $(s, y, z)$ , then  $g(\tilde{N}, \tilde{Q}) = g(\tilde{N}, -\tilde{Q})$ . For uniform sections :  $S(s) \equiv S$ ,

$$g(\tilde{N}, \tilde{Q}) = \inf_{\tilde{\epsilon} \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{\tilde{S}} |\tilde{\epsilon} - \tilde{y}| d\tilde{y} d\tilde{z} - \tilde{\epsilon} \cdot \tilde{N} \right\} - \frac{1}{2} |\tilde{Q}| \quad (2.18)$$

### 2.3.2 The non-symmetric material distribution

Consider a beam having circular sections centered at  $y = z = 0$ , and the following non-symmetric material distribution :

$$|\tilde{S}(\tilde{s})| = \tilde{S}^m \left( 1 + \Delta \tilde{S} \left( \frac{(\tilde{s} - \tilde{s}_0)^2}{\frac{1}{12} + \tilde{s}_0^2} - 1 \right) \right) \quad (2.19)$$

where

- $|\tilde{S}(\tilde{s})|$  is the area of section  $\tilde{S}(\tilde{s})$
- $\tilde{S}^m$  is the mean normalized section area such that the volume of the beam is :

$$V = \tilde{S}^m \cdot l^3$$

$$\begin{aligned} \langle |\tilde{S}| \rangle &= \int_{-1/2}^{1/2} |\tilde{S}(\tilde{s})| d\tilde{s} \\ &= \frac{1}{l^3} \int_{-l/2}^{l/2} |S(s)| ds = \tilde{S}^m \end{aligned}$$

- $\Delta \tilde{S}$  is the relative variation of section
- $-\frac{1}{2} \leq \tilde{s}_0 \leq \frac{1}{2}$  is the coordinate where beam section is minimum.

Parameter  $\tilde{s}_0$  is a new defect parameter which describes the non-symmetry of the material distribution in the cell edges. For  $\Delta \tilde{S} = 0$ , the material distribution is uniform and  $\tilde{S}^m = \frac{S}{l^2}$ . For  $\Delta \tilde{S} \neq 0$ , the minimum section  $\tilde{S}^m (1 - \Delta \tilde{S})$  is reached at  $\tilde{s} = \tilde{s}_0$ . In the special case  $\tilde{s}_0 = 0$ , the strut is symmetric.

Function  $g(\tilde{N}, \tilde{Q})$ , which is defined by (2.17), is numerically computed for three cases :

- The uniform case  $\Delta\tilde{S} = 0$  for which  $g(\tilde{N}, \tilde{Q})$  is given by (2.18).
- The symmetric case  $\Delta\tilde{S} = 0.2$  and  $\tilde{s}_0 = 0$ .
- The non-symmetric case  $\Delta\tilde{S} = 0.2$  and  $\tilde{s}_0 = 0.2$ .

Fig. 2.3 shows the strength domain of the beam, (2.16), for  $N = 0$ , in the plane of the normalized shear force  $\frac{\tilde{Q}}{\tilde{S}_{m2}}$  and the normalized bending moment  $\frac{\tilde{M}}{\tilde{S}_{m2}}$ . It is observed that the effect of  $\tilde{s}_0$  is to rotate and to deform the strength domain in the  $N = 0$  plane. For  $N = 0$ , depending on the ratio of  $\frac{\tilde{Q}}{\tilde{S}_{m2}}$  and  $\frac{\tilde{M}}{\tilde{S}_{m2}}$ , a non-symmetric material distribution will increase or decrease the plastic collapse strength of the beam. Fig. 2.4 shows the strength domain for  $Q = 0$ , in the plane of the normalized normal force  $\frac{\tilde{N}}{\tilde{S}_m}$  and the normalized bending moment  $\frac{\tilde{M}}{\tilde{S}_{m2}}$ . It is clear that  $\tilde{s}_0$  has no influence on the plastic collapse strength for  $Q = 0$ .

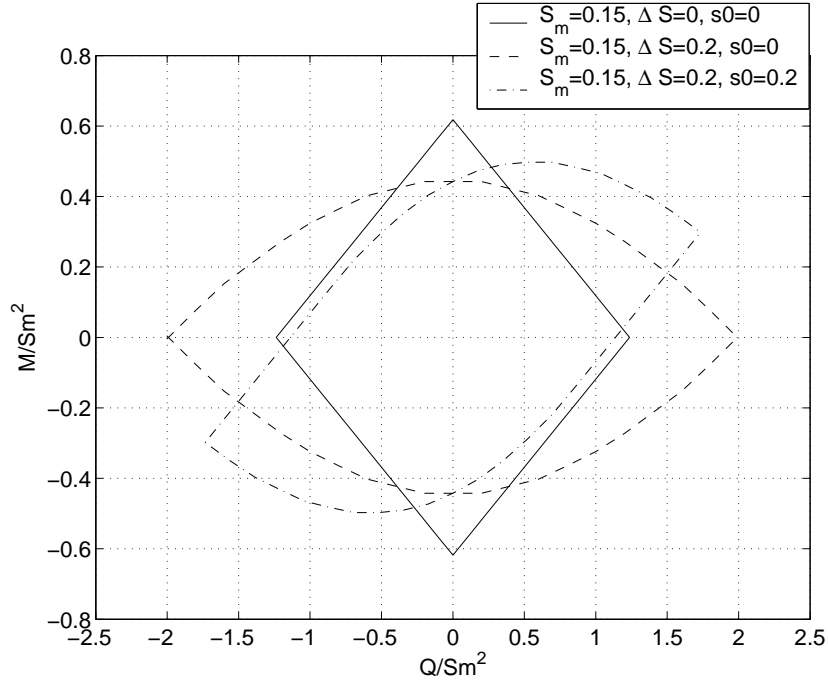


FIGURE 2.3. Strength domain of the beam in the  $\tilde{N} = 0$  plane for three  $(\Delta\tilde{S}, \tilde{s}_0)$

Besides, these numerical results fit very well with the following quadratic expression for  $g(\tilde{N}, \tilde{Q})$  :

$$g_{app}(\tilde{N}, \tilde{Q}) = \inf_{|\tilde{s}| \leq \frac{1}{2}} \left\{ \alpha \cdot \frac{\tilde{N}^2}{\tilde{R}(\tilde{s})} + \beta \cdot \tilde{R}^3(\tilde{s}) + \tilde{s} \cdot \tilde{Q} \right\} \quad (2.20)$$

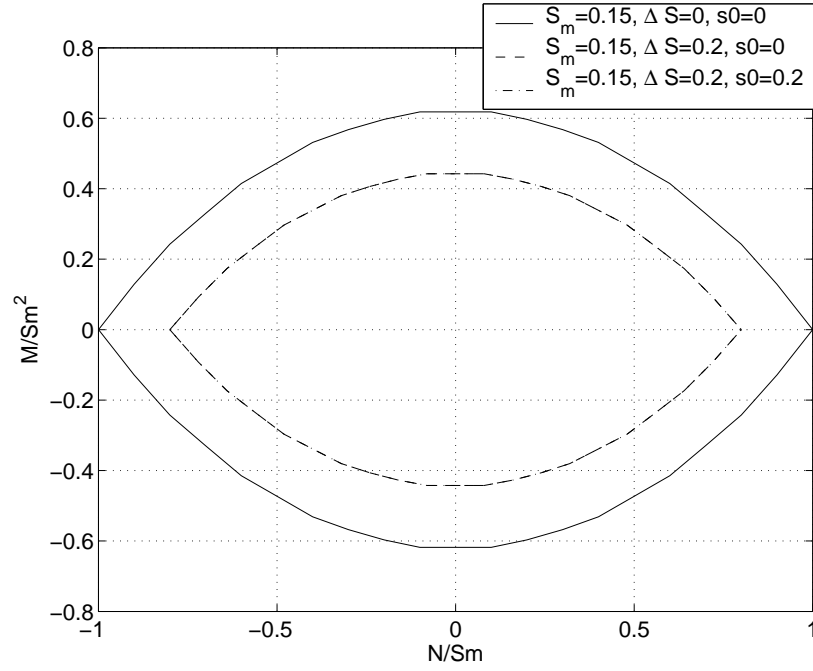
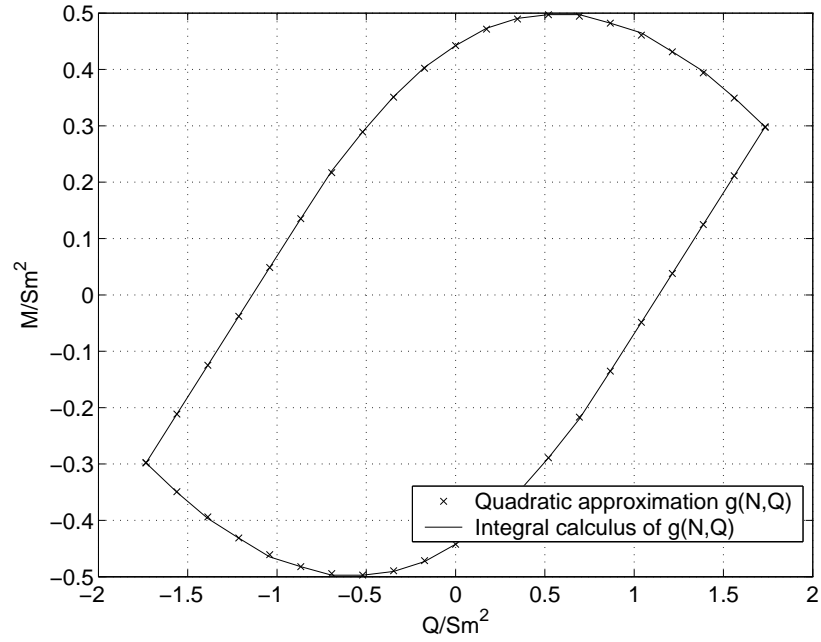
where

- $\tilde{R}(\tilde{s})$  is the radius at the coordinate  $\tilde{s}$
- $\beta = \frac{4}{3}$
- $\alpha = -\frac{4}{3\pi^2}$

Fig. 2.5 and Fig. 2.6 show the comparison between  $g(\tilde{N}, \tilde{Q})$  and  $g_{app}(\tilde{N}, \tilde{Q})$  for the non-symmetric geometry ( $\tilde{S}_m = 0.15$ ,  $\Delta\tilde{S} = 0.2$ ,  $\tilde{s}_0 = 0.2$ ) in the plane  $N = 0$  (Fig. 2.5) and  $Q = 0$  (Fig. 2.6).

## 2.4 Tetrakaidecahedral lattice

In this section, the unit cell problem (2.6) is set and solved for a tetrakaidecahedral lattice of beams that are rigidly connected in vertices : the set  $\mathcal{SA}(\underline{\Sigma})$  of statically compatible generalized


 FIGURE 2.4. *Strength domain of the beam in the  $\tilde{Q} = 0$  plane for three  $(\Delta\tilde{S}, \tilde{s}_0)$* 

 FIGURE 2.5. *Quadratic approximation of the strength domain of the beam in the  $\tilde{N} = 0$  plane for  $(\tilde{S}_m = 0.15, \Delta\tilde{S} = 0.2, \tilde{s}_0 = 0.2)$*



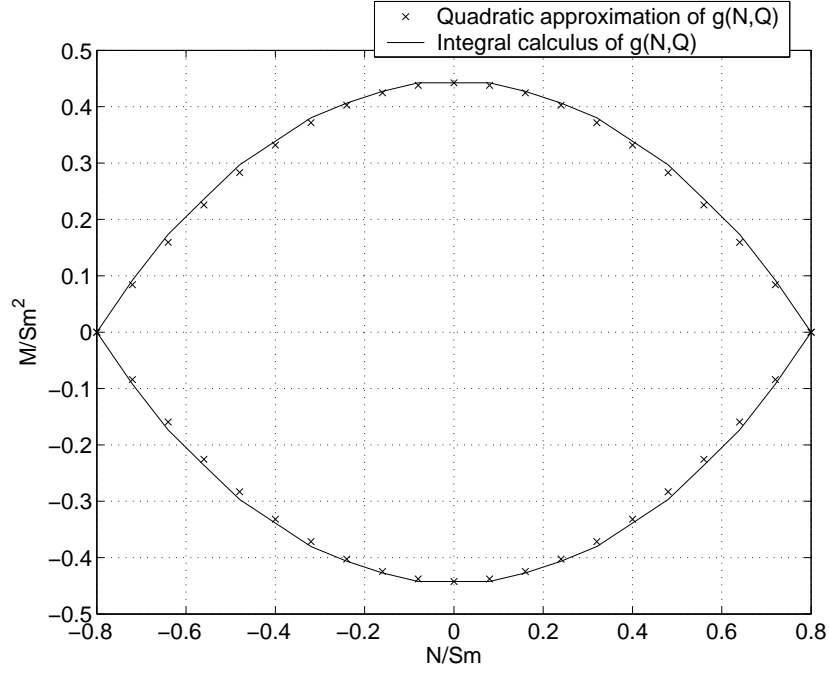


FIGURE 2.6. Quadratic approximation of the strength domain of the beam in the  $\tilde{Q} = 0$  plane for  $(\tilde{S}_m = 0.15, \Delta\tilde{S} = 0.2, \tilde{s}_0 = 0.2)$

stresses is studied and the effective ultimate yield strength domain of the foam is analytically determined.

### 2.4.1 Unit cell problem

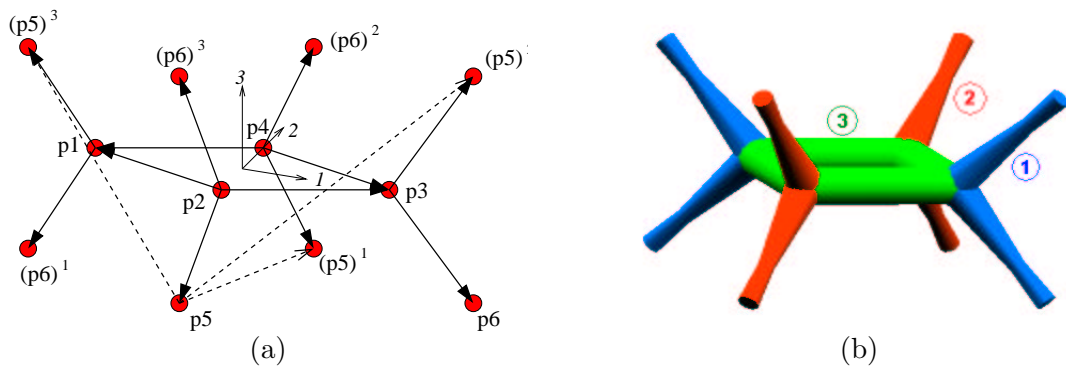


FIGURE 2.7. (a) Unit cell of a tetrakaidecahedral lattice, (b) Unit cell with  $\Delta\tilde{S} \neq 0$ ,  $\tilde{s}_0 \neq 0$

The tetrakaidecahedral lattice corresponding to the well-known Kelvin partition of the 3D space is considered in this paper. Fig. 2.7(a). It has been shown by [Pradel, 1998] that this lattice is composed of 6 types of particles :  $p_1, p_2, \dots, p_6$  and of 12 oriented beams of length  $l$  that generate the lattice by periodicity according to the vectors which link  $p_5$  to  $(p_5)^1$ ,  $(p_5)^2$  and  $(p_5)^3$ , or equivalently,  $p_6$  to  $(p_6)^1$ ,  $(p_6)^2$  and  $(p_6)^3$ . The unit cell volume is  $8\sqrt{2}l^3$  and the components in the reference of Fig. 2.7(a) of the branch vectors are :

$$\underline{l}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = \frac{l}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

where  $\alpha_i \in \{-1, 0, +1\}$ , with  $i = 1, 2, 3$ , are such that  $|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| = 2$ . It is assumed that the material distribution in the beams is such that  $(2, 3)$ ,  $(3, 1)$  and  $(1, 2)$  are three planes of material symmetry of the lattice. Therefore, there exist three types of beams as shown in Fig. 2.7(b). Of interest are the macroscopic stress states  $\underline{\underline{\Sigma}}$  which are invariant under the action of these plane symmetries. Therefore, the analysis is restricted to :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

It is found that the periodic interaction forces and moments  $(I_c)_{c \in \mathcal{C}}$  in  $\mathcal{SA}(\underline{\underline{\Sigma}})$  which are invariant with respect to these symmetries are of the form :

$$\underline{f}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = 2l^2 \begin{pmatrix} \alpha_1 \Sigma_1 \\ \alpha_2 \Sigma_2 \\ \alpha_3 \Sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\hat{m}}_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = \begin{pmatrix} \alpha_2 \alpha_3 \overline{M}_1 \\ \alpha_1 \alpha_3 \overline{M}_2 \\ \alpha_1 \alpha_2 \overline{M}_3 \end{pmatrix}$$

where  $\overline{M}_i$ , with  $i = 1, 2, 3$ , are undetermined moments.

According to the analysis above, diagonal  $\underline{\underline{\Sigma}}$  (2.21) in  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$  are such that there exist  $\overline{M}_i$ , with  $i = 1, 2, 3$ , verifying :

$$-g_i(-\tilde{N}_i, -\tilde{Q}_i) \leq \tilde{M}_i \leq g_i(\tilde{N}_i, \tilde{Q}_i) \quad (2.22)$$

where  $(N_i, Q_i)$  are the normal and shear force of the beam defined by  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  such that  $\alpha_i = 0$  and the other two  $\alpha$  being equal to  $+1$ . They are expressed in terms of  $\underline{\underline{\Sigma}}$  as :

$$\begin{pmatrix} \tilde{N}_i \\ \tilde{Q}_i \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{l\sigma^*} \underline{P}_i \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

where

$$\underline{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Moreover, for  $i = 1, 2, 3$ , inequality (2.22) is compatible if :

$$g_i(\tilde{N}_i, \tilde{Q}_i) + g_i(-\tilde{N}_i, -\tilde{Q}_i) \geq 0 \quad (2.24)$$

### 2.4.2 Regular non-symmetric cells

The analytical model described above is utilized to investigate the effect of non-symmetric material distribution in the cell edges of regular tetrakaidecahedral lattice on the overall strength of these materials.

Recall that  $\mathcal{G}^{\text{hom}}$  is the closed convex set of  $\underline{\Sigma}$  such that inequalities (2.24), with  $i = 1, 2, 3$ , are verified with  $(\tilde{N}_i, \tilde{Q}_i)$  given by (2.23), and  $g(\tilde{N}_i, \tilde{Q}_i)$  defined by (2.17) and approximated by (2.20). It is assumed that beams of types 1 and 2 have the same material distribution  $((\tilde{S}^m)_i = \tilde{S}^m, (\Delta\tilde{S})_i = \Delta\tilde{S}, (\tilde{s}_0)_i = \tilde{s}_0)$  for  $i = 1, 2$ , and that beams of types 3 are uniform  $((\tilde{S}^m)_3 = \tilde{S}_1(-\frac{1}{2}) = \tilde{S}_2(-\frac{1}{2}), (\Delta\tilde{S})_3 = 0, (\tilde{s}_0)_3 = 0)$ . Fig. 2.7(b). It should be emphasized that the relative density of this lattice is  $\frac{3}{2\sqrt{2}}\tilde{S}^m \left(1 + \frac{\Delta\tilde{S}}{3} \frac{\frac{1}{6} + \tilde{s}_0}{\frac{1}{12} + \tilde{s}_0^2}\right)$ .

### 2.4.3 Results

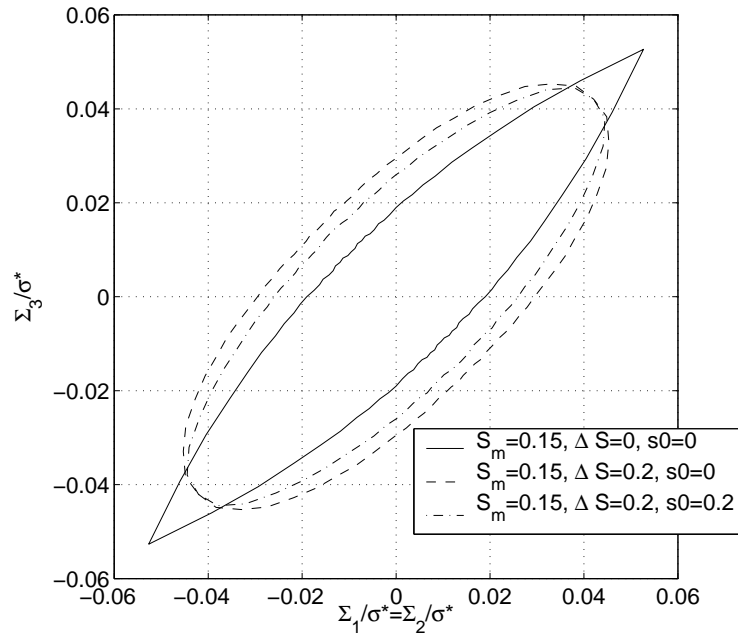


FIGURE 2.8. Yield surface in the  $\Sigma_{11} = \Sigma_{22}$  plane for three  $(\Delta\tilde{S}, \tilde{s}_0)$

Fig. 2.8 represents the yield surface in the  $\Sigma_1 = \Sigma_2$  plane for  $\tilde{S}^m = 0.15$  and three  $(\Delta\tilde{S}, \tilde{s}_0)$  :  $(\Delta\tilde{S} = 0, \tilde{s}_0 = 0)$  (the uniform case),  $(\Delta\tilde{S} = 0.2, \tilde{s}_0 = 0)$  and  $(\Delta\tilde{S} = 0.2, \tilde{s}_0 = 0.2)$ . It is observed that  $\tilde{s}_0$  has a weak effect on the strength domain, whereas  $\Delta\tilde{S}$  changes its shape. For  $\Delta\tilde{S} \neq 0$ , the strength domain area is not affected. On the other hand, the yield surface is more contracted in the  $\Sigma_3 = \Sigma_1$  direction and it is more expanded in the perpendicular direction. Depending on the loading direction, the non-uniform material distribution is more or less resistant than the uniform one.

Fig. 2.9, Fig. 2.10 and Fig. 2.11 show the yield surface in the  $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 = 3p$  plane, for the same three selected values of  $(\Delta\tilde{S}, \tilde{s}_0)$  and for four values of  $p$  :  $3p = 0$ ,  $3p = 0.05$ ,  $3p = 0.01$  and  $3p = 0.015$ . Parameter  $\tilde{s}_0$  has a weak effect on the strength domain (Fig. 2.10 and Fig. 2.11). It should be emphasized that parameter  $\Delta\tilde{S}$  has the most significant effect on the overall strength (Fig. 2.9 and Fig. 2.10). For  $p \leq 0.01$ , the non-uniform material distribution is more resistant than the uniform one. For  $p = 0$ , 20% of relative variation of the section ( $\Delta\tilde{S} = 0.2$ ) increases up to

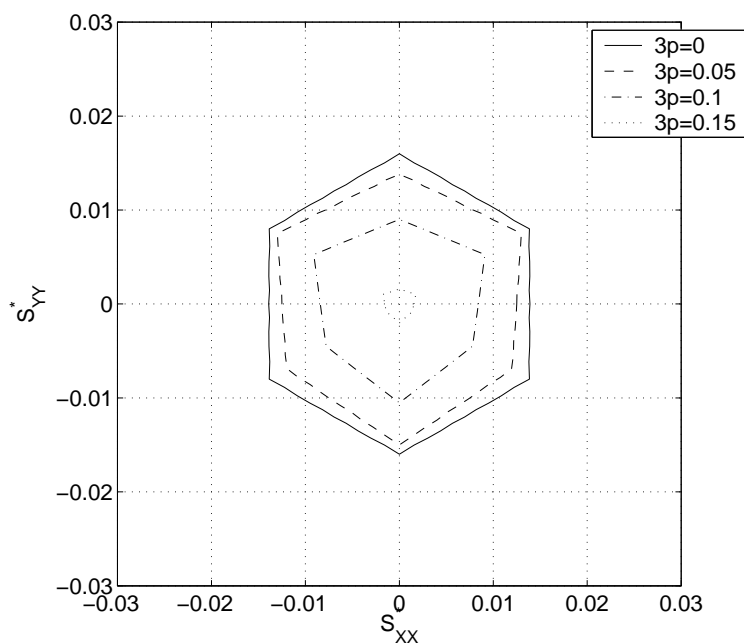


FIGURE 2.9. Yield surface in the  $\Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \Sigma_{33} = 3p$  plane for  $\tilde{S}_m = 0.15$ ,  $\Delta\tilde{S} = 0$ ,  $\tilde{s}_0 = 0$  and four values of  $p$

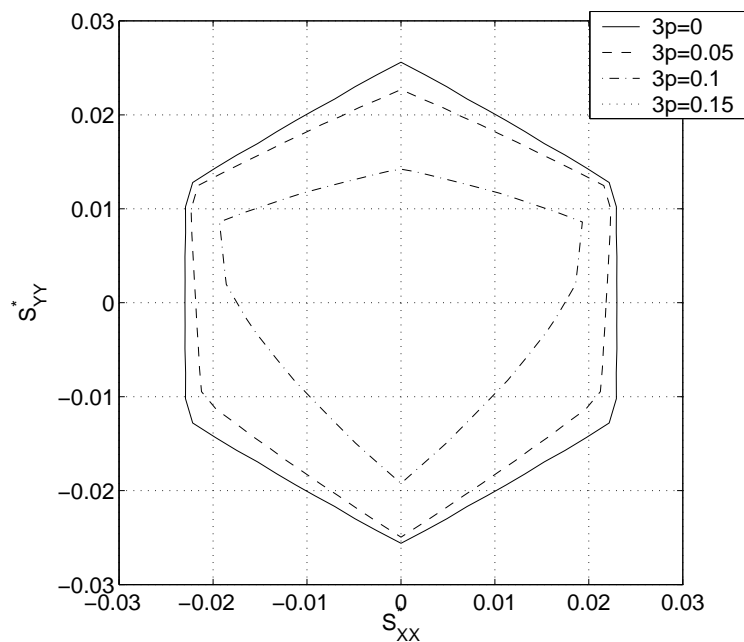


FIGURE 2.10. Yield surface in the  $\Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \Sigma_{33} = 3p$  plane for  $\tilde{S}_m = 0.15$ ,  $\Delta\tilde{S} = 0.2$ ,  $\tilde{s}_0 = 0$  and four values of  $p$

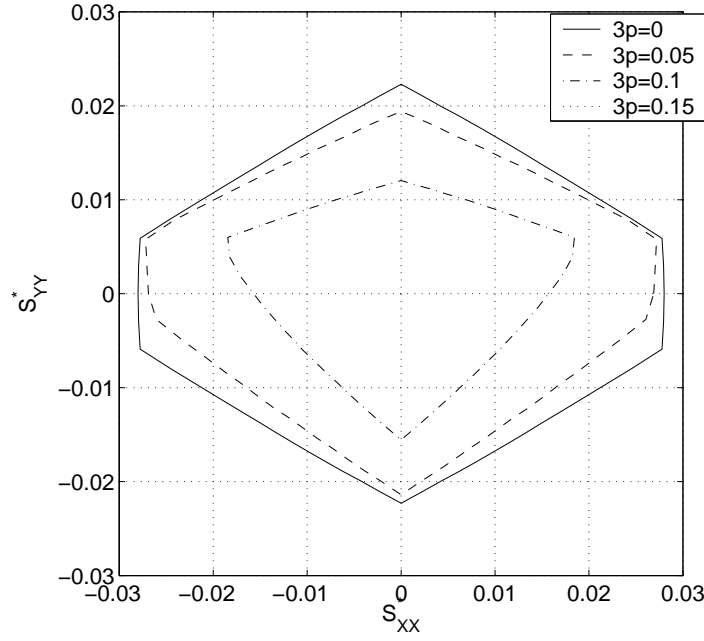


FIGURE 2.11. Yield surface in the  $\Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \Sigma_{33} = 3p$  plane for  $\tilde{S}_m = 0.15$ ,  $\Delta\tilde{S} = 0.2$ ,  $\tilde{s}_0 = 0.2$  and four values of  $p$

56% the strength in the deviatoric stress direction  $S_{XX} = 0$  and up to 64% in the stress direction  $S_{YY} = 0$ .

## Summary

A rigorous method for the homogenization of general elastoplastic periodic lattices has been applied to 3D cellular solids. Ultimate yield surface of a non-uniform 3D Euler-Bernoulli have been determined with this method. Results shows that defects have an influence on the shape of the plastic domain. Then, the general model have been used to solve unit cell problem for tetrakaidecahedral lattice. This systematic method is well adapted for non-symmetric material distribution. Defects of this type have been introduced and new results concerning non-symmetric material distribution in the cell struts of the foam have been obtained. They show that the non-uniform material distribution increases the plastic collapse strength, except for particular loading directions. The non-symmetry of the material distribution has no significant influence on the yield surface.



# Conclusion de la première partie

Une des propriétés mécaniques intéressantes pour les applications industrielles des matériaux cellulaires est leur capacité à dissiper l'énergie. Celle-ci est principalement caractérisée par le domaine de résistance, c'est-à-dire la charge d'écoulement plastique en fonction de l'état de contrainte global appliqué.

De nombreuses études ont été menées pour déterminer ce domaine pour différents matériaux alvéolaires qu'ils soient bidimensionnels comme les nids d'abeilles ou tridimensionnels comme les mousses. Cependant les méthodes utilisées ne permettent pas ou difficilement d'obtenir des résultats lorsque les structures ne présentent pas certaines symétries. Les théorèmes d'homogénéisation donnent la possibilité d'offrir un cadre plus systématique à ces modélisations. Nous proposons donc une méthode utilisant les techniques d'homogénéisation des milieux périodiques pour déterminer le domaine de résistance d'un matériau cellulaire présentant une géométrie quelconque.

Dans le premier chapitre nous avons présenté cette méthode de façon générale. Le matériau cellulaire est ici vu comme un réseau périodique de poutres élasto-plastiques parfaites encastrées aux noeuds. La première étape de la mise en oeuvre de ce modèle consiste à déterminer une cellule de base représentative, permettant de reproduire par périodicité la structure infinie. Sur cette cellule de base, le nombre de degrés de liberté est alors fini et nous pouvons déterminer l'ensemble des efforts dans les poutres statiquement admissibles associé à un état de contrainte appliqué sur la structure infinie. Le domaine de résistance correspond alors à la partie de cet ensemble vérifiant le critère de résistance choisi.

Nous avons également proposé dans ce chapitre une application de ce modèle à une structure bidimensionnelle de type nids d'abeilles. Nous avons ainsi pu justifier la méthode en retrouvant les résultats théoriques relevés dans la littérature. Par ailleurs, nous avons comparé, pour une géométrie donnée, le domaine de résistance obtenue par la méthode proposée, à celui calculée numériquement par une modélisation aux éléments finis. La bonne concordance des résultats a permis de renforcer la validation du modèle. De plus, nous avons montré que pour les nids d'abeilles métalliques étudiés, le flambement apparaît après la plastification des rotules ou des poutres. En effet, nous avons pu prédire, grâce à notre modèle qui ne prend pas en compte le flambement, la valeur de plateau d'une courbe force-déplacement d'un essai d'écrasement d'un nids d'abeille. Dans ce cas, le plateau caractéristique des matériaux alvéolaires est donc provoqué par la plastification du matériau.

L'intérêt de la méthode proposée étant son large champ d'application, nous l'avons ensuite utilisée pour étudier l'influence d'un défaut sur la taille et la forme du domaine de résistance du matériau global. Le défaut choisi correspond à une distribution de matière non uniforme et non symétrique le long des poutres constituant la cellule de base. Nous avons ainsi pu conclure que le paramètre représentant l'importance de variation relative d'épaisseur le long des poutres agit fortement sur la forme du domaine. Dans la plupart des cas il a pour effet d'augmenter la charge plastique mais dans certaines directions de chargement, il la diminue. Par contre, la non symétrie de la distribution influence plus faiblement l'enveloppe de résistance.

Le second chapitre a été consacré à l'application de la modélisation à des matériaux de type mousse porosité ouverte. Nous avons opté pour une cellule de base tétrakaidécaédrale pour ses

bonnes propriétés de partition de l'espace tridimensionnel. De la même manière que pour la cellule hexagonale, nous avons utilisé le modèle pour analyser l'influence d'une distribution de matière non uniforme et non symétrique le long des poutres constitutives du réseau. Les conclusions de cette étude sont similaires en ce sens que la non symétrie a un effet plus faible sur le domaine de résistance global du matériau que la distribution non uniforme : dans ce dernier cas, la charge plastique est diminuée pour certains chargements et le domaine est étendu dans les autres directions.

Nous avons pu montrer l'efficacité de la modélisation proposée pour déterminer les caractéristiques plastiques de divers matériaux cellulaires. Une validation expérimentale sur des nids d'abeilles et des mousses métalliques permettrait d'achever la vérification des performances du modèle. Une étude numérique complémentaire sera également nécessaire pour définir ses limites de validité en termes d'éclatement minimal des poutres et de nombre minimal de cellules de base dans le domaine global considéré.

Le type de défauts considéré dans ce mémoire a permis d'apporter de nouveaux résultats. Toutefois nous nous sommes restreints à des géométries classiques de cellules (hexagone, tétrakaidécaèdre). Le modèle proposé pouvant être appliqué à n'importe quelle géométrie, il pourrait être utilisé pour étudier des matériaux aux cellules plus complexes. Couplé à des méthodes d'optimisation, il permettrait de définir la géométrie idéale pour une application précise.



## Deuxième partie

# Etude expérimentale de la fissuration réflective (“reflective cracking”)



# Introduction de la deuxième partie

Le réseau routier français comprenait au 1<sup>er</sup> janvier 2004 plus d'un million de kilomètres de routes revêtues. La part du budget du Ministère de l'Équipement, des Transports et du Logement, qui concerne les infrastructures de transport est répartie à peu près uniformément entre les postes de développement de l'infrastructure (54% en 2004) et ceux de l'entretien et de la réhabilitation du réseau routier (46% en 2004). Depuis 1992, des campagnes systématiques d'évaluation de l'état des chaussées (IQRN - 1997) permettent de quantifier les besoins d'entretien et de réparation. Ainsi en 1997, 12% du réseau national (autoroutes non concédées et routes nationales) étaient considérées en mauvais état et nécessitaient donc des travaux de réhabilitation.

Les méthodes de réparation sont nombreuses et variées et dépendent des endommagements relevés. Dans ce mémoire et dans le cadre du projet du groupe ARCELOR de développement d'une nouvelle solution retardatrice de fissuration, nous nous intéressons particulièrement à une de ces dégradations : la fissuration réfléctive ou "reflective cracking". C'est un endommagement caractéristique des chaussées semi-rigides qui sont des structures composées d'une assise en matériaux traités aux liants hydrauliques et d'une couche de roulement en matériaux bitumineux. Cette fissuration se déroule en trois phases : la fissuration de retrait connue et admise des assises traitées aux liants hydrauliques, l'initiation de la fissuration dans la couche bitumineuse supérieure par réflexion de la discontinuité inférieure et la propagation jusqu'à la surface. Cet endommagement tient donc son nom de son mode de développement c'est-à-dire la réflexion en surface d'un défaut d'une couche plus profonde.

Les différentes techniques existantes agissent soit pour réduire la fissuration des matériaux à base de liants hydrauliques, soit pour la provoquer et la localiser, soit pour ralentir la remontée des discontinuités dans la couche supérieure. Dans cette dernière catégorie, nous trouvons toutes les solutions de type interface retardatrice de fissuration, c'est-à-dire les solutions qui consistent à insérer une couche intermédiaire entre l'assise fissurée et la couche supérieure saine. L'interface peut être souple pour dissiper les concentrations de contrainte à proximité des fissures, ou rigide pour renforcer la couche supérieure et ponter les fissures lorsqu'elles ont déjà atteint l'intérieur de la couche bitumineuse. La solution développée par le groupe ARCELOR fait partie des interfaces rigides. Elle présente toutes les qualités des solutions rigides existantes sur le marché (rigidité longitudinale, facilité d'engrènement des granulats) et des atouts supplémentaires tels que son coût peu élevé, sa structure tridimensionnelle permettant un bon accrochage ou encore sa raideur transverse facilitant sa mise en place.

Dans le premier chapitre, nous proposons une présentation générale de la composition d'une chaussée et des différents types de structure répertoriés. La méthode réglementaire de dimensionnement des chaussées neuves en France est également brièvement présentée, afin de comprendre quelle est l'approche de calcul choisie ainsi que les chargements pris en compte.

Le second chapitre traite du vieillissement des chaussées. Après un exposé rapide des différentes dégradations cataloguées, nous nous concentrons sur la fissuration et plus particulièrement sur la fissuration réfléctive. À partir des travaux relevés dans la littérature nous la définissons en termes de forme, de mode et nous étudions la contribution des différents chargements sur son développement.

Les techniques d'entretien et de réparation de chaussées sujettes à ce défaut font également l'objet de ce chapitre.

L'étude bibliographique est poursuivie dans le chapitre suivant pour déterminer quels sont les moyens expérimentaux existants pour tester l'efficacité des solutions de réhabilitation. Parmi ceux-ci, nous avons sélectionné deux essais, l'essai de retrait-flexion et l'essai FABAC, qui nous semblaient les plus représentatifs. L'essai de retrait-flexion est un essai de laboratoire sur des éprouvettes de petite taille. Elles sont sollicitées en traction longitudinale lente et continue pour simuler le retrait et en flexion verticale cyclique pour simuler le trafic. Un essai dure une dizaine d'heures et se fait dans des conditions de température constante. L'essai FABAC est un essai à l'échelle 1 réalisé dans des conditions extérieures, sans contrôle de la température; un essai dure environ un mois. Les éprouvettes sont des planches d'essai fabriquées dans des conditions de chantier. Le bâti est constitué de quatre demi-essieux jumelés mis en mouvement par un moteur électrique pour simuler le passage répété de poids lourds. Nous avons réalisé une campagne d'essais sur chacun de ces deux tests afin de comparer les performances de différentes interfaces retardatrices de fissuration, dont la solution innovante proposée. Les observations faites lors de ces deux campagnes, ainsi que l'analyse des résultats nous a conduit à conclure au besoin de développement d'un essai intermédiaire. Cet essai appelé SIFIRE fait l'objet des trois chapitres suivants.

La base de son dimensionnement est de réaliser un essai le plus représentatif possible du fonctionnement d'une chaussée, tout en respectant les contraintes communes à tous les tests en laboratoire (encombrement, moyens, ...). Aussi, nous avons commencé par analyser de façon détaillée le comportement d'une chaussée fissurée. Cette étude est exposée dans le chapitre 4 et permet d'aboutir à la définition de fonctions de référence que nous jugeons indispensables de reproduire dans l'essai.

La conception de l'essai SIFIRE qui permet d'atteindre les objectifs recherchés est présenté dans le cinquième chapitre. Nous définissons les principaux dispositifs expérimentaux caractérisés par des paramètres de dimensionnement, et nous montrons qu'après calage de ces grandeurs, l'essai permet de reproduire les fonctions de référence choisies précédemment. Enfin, la mise au point du bâti d'essai et la procédure de fabrication des éprouvettes sont présentées dans le dernier chapitre.

## Chapitre 3

# Le dimensionnement des chaussées neuves

### Introduction

Les travaux théoriques de Burmister (1943) sur le calcul des contraintes et des déformations d'un multicouche élastique soumis à une pression circulaire verticale peuvent être considérés comme les débuts des démarches rationnelles actuelles de dimensionnement des chaussées. En France, c'est surtout dans les années 70, avec la publication des catalogues de structures types de chaussées, que ce choix a été confirmé au détriment des méthodes empiriques ultérieures.

Dans ce chapitre nous proposons de rappeler tout d'abord la composition d'une chaussée et la fonction de chacune de ses couches. La diversité des matériaux utilisés nous amènera à lister les différentes structures normalisées en France. Enfin, le dernier paragraphe est une présentation succincte de la méthode réglementaire française de dimensionnement des chaussées neuves.

### 3.1 La chaussée, une structure multicouche

Une route, au sens large du terme, comporte une structure, **la chaussée**, placée sur un massif semi-infini : **la plate-forme support**. La géotechnique routière a pour mission de définir ce massif d'un point de vue géométrique (profil en long, épaisseur des couches) mais aussi mécanique (caractéristiques des sols et des roches), alors que le dimensionnement de chaussée concerne plus particulièrement la structure de chaussée proprement dite, constituée de deux types de couches : les **couches de surface** qui sont mises en oeuvre au-dessus des **couches d'assises** (voir Fig. 3.1).

#### 3.1.1 La plate-forme support

La plate-forme comprend le **sol support** terrassé au-dessus duquel est généralement mis en place une **couche de forme**.

Cette plate-forme doit vérifier ([LCPC-SETRA, 1994] et [T.I., 1992]) :

- *des critères à court terme* : Pendant la construction de la chaussée, elle doit pouvoir supporter les charges de trafic de chantier et de compactage des couches supérieures. Elle doit également être peu sensible aux intempéries.
- *des critères à long terme* : Elle participe au fonctionnement en service de la chaussée. La qualité de cette couche influe donc sur le dimensionnement des couches de chaussées : une

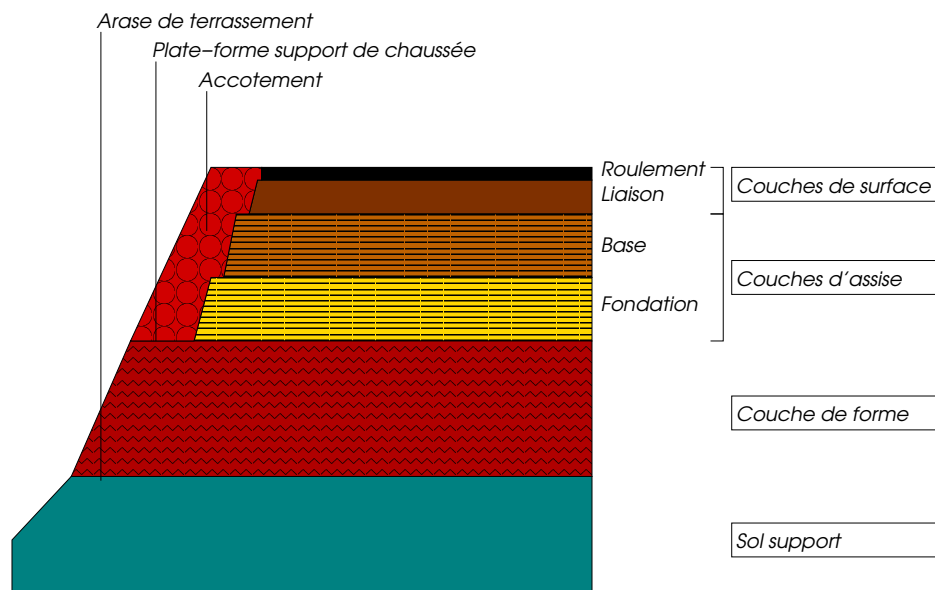


FIGURE 3.1. La structure multicouche d'une chaussée [LCPC-SETRA, 1994]

Module (MPa)	20	50	120	200
Classe de plate-forme	PF1	PF2	PF3	PF4

TABLEAU 3.1. Classes de portance à long terme de la plate-forme support [LCPC-SETRA, 1994]

meilleure plate-forme autorise une chaussée moins épaisse, donc moins coûteuse. Dans cette phase, les intempéries ne doivent bien sûr pas non plus pouvoir modifier le comportement de la chaussée.

Ces exigences sévères mènent à apporter une attention particulière au choix du sol de fondation. Ce choix pouvant être rapidement limité par les conditions propres au chantier, la mise en place d'une couche de forme s'impose assez souvent.

La couche de forme est une structure constituée d'une ou plusieurs couches de matériaux, ayant chacune une fonction distincte. Par exemple, on peut y insérer un géotextile, ou encore achever en surface avec un enduit gravillonné ou un film de protection. Cette couche est placée sur l'arase de terrassement et doit permettre de créer une plate-forme support homogène et performante. C'est donc une couche de transition entre le sol support et la structure de chaussée.

La réglementation française ([LCPC-SETRA, 1994]) définit quatre classes de portance à long terme des plates-formes support de chaussées. Elles sont présentées dans le tableau Tab. 3.1 en fonction de la valeur du module de déformation réversible.

Lors du calcul réglementaire des contraintes et des déformations sous chargement de trafic, la plate-forme support est assimilée à un milieu semi-infini élastique, défini par :

- un module d'Young représentatif du comportement à long terme (Tab. 3.1)
- un coefficient de Poisson égal à 0.35 : c'est la valeur moyenne retenue par [LCPC-SETRA, 1994], même si ce paramètre peut varier avec la nature des sols, leur état hydrique et les sollicitations appliquées.

### 3.1.2 Les couches d'assises

Les couches d'assises sont en général au nombre de deux : la couche de base et la couche de fondation. Elles jouent un rôle structural : elles apportent à la chaussée une résistance mécanique suffisante pour lui permettre de supporter la charge verticale de trafic ; elles ont également une fonction de répartition de la charge sur la plate-forme support afin de rendre les déformations à ce niveau, admissibles. Les matériaux utilisés dans les assises de chaussées peuvent être classés selon quatre catégories.

#### Les graves non traitées

C'est un mélange à granularité continue, de cailloux, de graviers, de sable et de fines. Pour être performante, elles doivent remplir un certain nombre de conditions en termes de granularité et d'angularité (bon arrangement des grains pour une meilleure compacité), de propreté et de durreté. Pour le calcul élastique de la chaussée, la valeur d'un module d'Young représentatif peut être obtenu en se reportant aux valeurs préconisées par [LCPC-SETRA, 1994]. Il est évalué en fonction du niveau de trafic et du rôle de couche de base ou couche de fondation de la couche de graves non traitées. En ce qui concerne le coefficient de Poisson, une valeur moyenne de 0.35 est retenu pour ce type de matériau. On notera ici que ce type de couche a l'inconvénient de présenter un module d'Young assez faible et de répartir assez mal la charge ; il ne peut donc pas convenir pour des chaussées à fort trafic.

#### Les graves et sables traités aux liants hydrauliques

Par rapport aux graves non traitées, ce type de matériau a l'avantage de présenter une plus grande rigidité. Les premières tentatives ont porté sur l'utilisation de ciment et ont été rapidement étendues aux techniques de traitement avec d'autres liants hydrauliques ou pouzzolaniques. Ces matériaux sont fabriqués en centrale afin d'obtenir des mélanges homogènes de qualité contrôlée. La réglementation française distingue les 9 types de graves et sables suivants :

- les graves-ciment (GC)
- les graves-pouzzolanes-chaux (GPz)
- les graves-laitier (GL)
- les graves-cendres volantes-chaux (GCV+chaux)
- les graves-cendres hydrauliques (GCH)
- les graves-liant spécial routier
- les graves-laitier-cendres volantes-chaux
- les sables traités au ciment (SC)
- les sables traités au laitier (SL)

Le dimensionnement de ces couches doit prendre en compte le comportement réversible sous charge (module d'Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$  pris égal à 0.25 pour ces matériaux), ainsi que l'endommagement par fatigue ( $\sigma_6$ ,  $b$  et  $SN$ ). Le comportement en fatigue est apprécié par des essais en flexion sur des éprouvettes trapézoïdales encastrées à leur base, et sollicitées en tête par une contrainte  $\sigma$ . En répétant ce type d'essai pour différents niveaux de contrainte, la courbe de fatigue peut être exprimée sous la forme :

$$\frac{\sigma}{R_F} = 1 + \beta \log N$$

avec  $\sigma$  le niveau de contrainte appliquée,  $R_F$  la résistance en flexion au premier chargement,  $\beta$  la pente de la droite et  $N$  le nombre de cycles à la rupture. On appelle  $SN$  l'écart-type de la distribution de  $\log N$  à la rupture pour  $10^6$  cycles.

Pour faciliter les calculs, la relation précédente est approchée, dans la gamme des trafics usuels (c'est-à-dire  $N \in [10^5; 10^7]$ ) par :

$$\frac{\sigma}{\sigma_6} = \left( \frac{N}{10^6} \right)^b \quad (3.1)$$

Le paramètre  $\sigma_6$  correspond au niveau de contrainte pour une rupture à  $10^6$  cycles et  $b$  est la pente de la droite de fatigue.

Par exemple, pour une grave-ciment, [LCPC-SETRA, 1994] recommande les valeurs de références suivantes :

$$E = 23GPa; \sigma_6 = 0.75MPa; -1/b = 15; SN = 1$$

L'inconvénient majeur de ces graves et sables traités est qu'ils se fissurent transversalement à plus ou moins long terme. Ce phénomène est lié au fait que ces matériaux sont soumis au retrait au jeune âge et sont sensibles aux variations thermiques.

### Les graves et sables traités aux liants hydrocarbonés

Les matériaux traités aux liants hydrocarbonés sont des mélanges de granulats, de liants hydrocarbonés et éventuellement d'additifs. Ils sont dosés, chauffés et malaxés en centrale. D'après la réglementation française [LCPC-SETRA, 1994], les graves-bitume, sont classées suivant 3 types, selon leur granulométrie et leur teneur en liant :

- GB1 : teneur en liant faible (3.5%) et granulométrie 0/20
- GB2 : teneur en liant moyenne (4.2%) et granulométrie 0/14
- GB3 : teneur en liant élevée (4.5%) et granulométrie 0/14

On notera qu'une augmentation de la teneur en liant a pour conséquence une faible augmentation du module mais une forte augmentation de la résistance en fatigue.

Les enrobés à module élevé (EME) font également partie des matériaux traités aux liants hydrauliques utilisés dans les couches d'assises. La norme française distingue 2 classes de performance.

- EME1 : teneur en liant minimale de 4.2% et granulométrie 0/10, 0/14 ou 0/20
- EME2 : teneur en liant minimale de 5.6% et granulométrie 0/10, 0/14 ou 0/20

Les sables-bitumes sont des matériaux caractérisés par un diamètre maximal des granulats inférieur à 6mm. Ils sont classés en 4 catégories notées A, B, C et D selon les valeurs de résistance de l'essai Duriez. C'est un essai de compression simple, qui a pour but de déterminer, pour un compactage donné, la tenue à l'eau d'un mélange hydrocarboné à chaud à partir des résistances à la compression avec ou sans immersion des éprouvettes.

Pour le dimensionnement de ces couches, les données nécessaires concernent le comportement élastique (module d'Young  $E$  et coefficient de Poisson  $\nu$  pris égal à 0.35 pour ces matériaux) et l'endommagement par fatigue ( $\varepsilon_6$ ,  $b$ ,  $SN$ ). De la même manière que pour les matériaux traités aux liants hydrauliques, les caractéristiques en fatigue sont déterminées à partir des résultats d'essais de fatigue en flexion sur des éprouvettes trapézoïdales encastrées à leur base. Ces essais sont réalisés à 10°C et 25Hz et consistent à solliciter l'éprouvette en tête par un déplacement sinusoïdal d'amplitude constante. La rupture est obtenue au bout de  $N$  cycles lorsque l'effort à appliquer est réduit de moitié. En répétant cet essai à différents niveaux d'amplitude, on peut alors construire la droite de fatigue qui est conventionnellement représentée par la relation suivante :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_6} = \left( \frac{N}{10^6} \right)^b \quad (3.2)$$

avec  $\varepsilon$  la déformation à  $N$  cycles,  $\varepsilon_6$  la déformation à  $10^6$  cycles de chargement et  $b$  la pente de la droite de fatigue.  $SN$  est l'écart-type qui permet d'évaluer la dispersion des résultats.



La spécificité de ces matériaux est que leurs caractéristiques mécaniques dépendent fortement de la température et de la vitesse de sollicitation. Le calcul de dimensionnement est réalisé pour une température constante appelée température équivalente  $\theta_{eq}$ . Elle est calculée de manière à ce que la somme des dommages subis par une chaussée pendant une année, pour une distribution de températures donnée, soit égale aux dommages que subirait la chaussée soumise à une température constante  $\theta_{eq}$  pendant une année. En France métropolitaine, on applique en général une température équivalente  $\theta_{eq} = 15^\circ C$ . En ce qui concerne la fréquence de sollicitation  $f$ , ce sont les caractéristiques déterminées à 10Hz qui sont utilisées. Cette valeur a été obtenue à partir du calcul du bassin de déformation créé par le passage d'un demi-essieu de 6.5 tonnes. En extrapolant la forme de ce bassin à une sinusoïdale, on obtient une longueur d'onde de 1.94m, ce qui correspond à une fréquence de 10Hz pour la vitesse standard de 70km/h.

Par exemple, pour une grave-bitume de type GB1 à  $15^\circ C$  et 10Hz, la réglementation recommande les valeurs de références suivantes :

$$E = 7GPa; \varepsilon_6 = 70.10^{-6}; -1/b = 5; SN = 0.4$$

### Le béton de ciment

Les bétons de ciment sont fabriqués en centrale et ont la propriété d'être maniabiles pendant un certain temps après leur fabrication et de durcir progressivement ensuite jusqu'à atteindre des résistances très élevées. Ils sont mis en place par vibration. L'ajout d'un entraîneur d'air est obligatoire pour que le béton résiste au gel, et d'autres adjuvants peuvent être utiles pour améliorer la maniabilité (plastifiant) ou les délais de mise en oeuvre (retardateur de prise). En effet, le béton routier est mis en place par des machines à coffrage glissant : il faut donc que ce matériau soit suffisamment fluide pour passer dans la machine et se serrer convenablement, mais il ne faut pas non plus que les bords de la dalle s'affaissent.

La norme française considère 6 classes de béton de ciment (BC), notées de 1 à 6, définies par leur résistance caractéristique à 28 jours à l'essai de fendage (traction indirecte).

Comme pour les matériaux traités aux liants hydrauliques, le dimensionnement de ces couches nécessitent la donnée du module d'Young  $E$ , du coefficient de Poisson  $\nu = 0.25$ , de la contrainte à  $10^6$  cycles  $\sigma_6$ , de la pente  $b$  et de l'écart-type  $SN$ . Par exemple pour un béton de ciment de classe 5, la réglementation recommande les valeurs de références suivantes :

$$E = 35GPa; \sigma_6 = 2.15MPa; -1/b = 16; SN = 1$$

#### 3.1.3 Les couches de surface

Les couches de surface sont constituées de la couche de roulement et quelquefois d'une couche de liaison. Leur apport structurel est généralement secondaire (sauf dans le cas d'assises granulaires car elles sont alors la seule couche liée), mais ce sont les couches les plus sollicitées puisqu'elles doivent résister non seulement aux intempéries mais aussi au frottement des pneumatiques. Leur fonction principale est d'assurer une certaine qualité d'usage de la chaussée. Les caractéristiques dimensionnantes s'expriment donc en termes d'uni, d'adhérence, de drainabilité, d'étanchéité et de résistance à l'orniérage.

Les défauts d'uni longitudinal et transversal ont pour origines les déformations du sol support et l'orniérage de la couche de surface.

A faible vitesse, la qualité de l'adhérence dépend en majeure partie de la microrugosité du revêtement. A plus grande vitesse, la capacité de celui-ci à évacuer l'eau emprisonnée sous la surface de contact du pneumatique a aussi une influence. Cependant ce facteur est quasiment éliminé dans le cas des enrobés drainants pour lesquels l'eau pénètre à l'intérieur du revêtement avant de cheminer transversalement jusqu'à l'accotement.

La fonction d'étanchéité des couches de surface est essentielle car elle permet de protéger la structure de chaussée des infiltrations d'eau, de sels de déverglaçage et des divers polluants répandus en surface.

Les matériaux utilisés pour réaliser les couches de surface peuvent être classés en trois catégories.

### **Les enduits superficiels**

Les enduits superficiels sont constitués de bitume et de gravillons répandus en couches successives. Les granulats utilisés doivent présenter de bonnes caractéristiques de dureté, d'angularité et de propreté. Différents types de bitume peuvent être employés selon le niveau de trafic et l'état du support : les bitumes purs, les bitumes modifiés, les émulsions de bitume.

### **Les enrobés hydrocarbonés à chaud**

Les enrobés sont des mélanges de granulats et de bitume pur ou modifié, réalisé à chaud en centrale de fabrication. Comme pour les enduits superficiels, les granulats utilisés doivent être durs, propres et de bonne forme. La variété des enrobés est grande. La composition du squelette granulaire des bétons bitumineux classiques doit permettre de réaliser non seulement une bonne résistance à l'orniérage par temps chaud mais aussi une bonne adhérence par temps de pluie. En contrepartie, leur épaisseur minimale de mise en place est assez importante (6 à 9cm). C'est pourquoi différentes solutions technologiques sont utilisées pour réduire une ou plusieurs de ces contraintes : les bétons bitumineux cloutés (ajout de gravillons durs pour dissocier les exigences d'adhérence de celles de masse de l'enrobé), enrobés drainants (augmentation de la porosité pour évacuer l'eau entre le pneumatique et la chaussée et éviter les projections), enrobés très minces à chaud (utilisation de bitume fibré ou modifié et d'une granulométrie importante et discontinue qui permet de réduire l'épaisseur de mise en oeuvre jusqu'à 2cm), enrobés coulés à froid (réduction de l'épaisseur de mise en oeuvre grâce à une granulométrie importante et l'utilisation d'émulsion de bitume).

### **Le béton de ciment**

Les dalles des chaussées en béton ont la particularité de jouer le double rôle de couche de roulement et de corps de chaussée. Leurs performances en tant que couche de surface sont obtenues par striage transversale aléatoire ou par cloutage (ajout de gravillons durs en surface).

## **3.2 Les différentes familles de structure**

Le contexte routier français est caractérisé par une grande diversité des techniques de chaussées. Le règlement routier propose un classement des différentes structures de chaussées selon six familles. Leur composition et leur fonctionnement sont présentés brièvement, de la plus souple à la plus rigide, dans la suite du texte.

### **3.2.1 Les chaussées souples**

Ces structures sont constituées d'une couche de surface bitumineuse (inférieure à 15cm) sur une assise en une ou plusieurs couches en matériaux granulaires non traités. L'épaisseur totale de la chaussée est comprise entre 30 et 60cm. Etant donnée leur faible rigidité, ces structures sont utilisées pour des chaussées à trafic faible ou très faible. Dans ce dernier cas, la couche bitumineuse supérieure peut se réduire à un enduit superficiel. Comme l'assise est non liée, sa rigidité dépend de celle du sol et de son épaisseur. Elle est en général peu importante, ce qui a pour conséquence une diffusion latérale faible des efforts verticaux qui sont transmis au support. Pour le dimensionnement, les couches sont considérées comme étant collées entre elles.

### 3.2.2 Les chaussées bitumineuses épaisses

Les couches d'assises de ces chaussées sont constituées de matériaux traités aux liants hydrocarbonés, mis en place en une ou plusieurs couches. Leur épaisseur est comprise entre 15 et 40cm. La couche de surface est réalisée également en matériaux bitumineux. Les contraintes verticales transmises au sol support sont faibles car atténuées par leur diffusion importante dans les couches d'assises liées. Celles-ci reprennent donc cette charge en termes de traction et flexion. Selon la qualité de l'interface, entre les couches d'assises, la déformation horizontale maximale se situera à la base de la couche la plus profonde (collage parfait) ou à la base de chacune des couches (décollage complet). Pour le calcul de la chaussée neuve, on considérera un collage parfait.

### 3.2.3 Les chaussées à assises traitées aux liants hydrauliques

Alors que la couche de surface est toujours constituée de matériaux bitumineux sur une épaisseur de 6 à 14cm, les assises sont dans ce cas réalisées en matériaux traités aux liants hydrauliques. Elles sont réalisées en une ou plusieurs couches et leur épaisseur est comprise entre 20 et 50cm. La grande rigidité de ce type d'assises permet de ne transmettre que des efforts verticaux très faibles au support. Par contre elles sont elles-mêmes soumises à des contraintes de traction-flexion importantes. La structure est modélisée en considérant un collage parfait entre la couche de roulement et la couche de base et entre la couche de fondation et le sol support. Par contre, la liaison entre la couche de base et la couche de fondation dépend de la nature du liant, elle peut être soit collée, soit décollée, soit intermédiaire (moyenne des cas collé et décollé).

Ces structures sont aussi appelées "chaussées semi-rigides". Dans la suite du mémoire, nous verrons que nous nous concentrerons sur ce type de structure et sa durabilité.

### 3.2.4 Les chaussées à structure mixte

La structure de ces chaussées se différencie de celle des chaussées à assises traitées aux liants hydrauliques par le fait que la couche de base (couche supérieure de l'assise) est constituée de matériaux bitumineux sur une épaisseur comprise entre 10 et 20cm. La couche de fondation (couche inférieure de l'assise) est quant à elle en matériaux traités aux liants hydrauliques (20 à 40cm). Une structure est considérée comme mixte si le rapport de l'épaisseur de matériaux bitumineux sur l'épaisseur totale de la chaussée est de l'ordre de 0.5. Alors que la couche de fondation sert à atténuer et à diffuser les contraintes transmises au sol support grâce à sa grande rigidité, la couche de base en matériaux traités aux liants hydrocarbonés, grâce à son épaisseur, a pour fonction de ralentir la remontée de la fissuration transversale de la couche inférieure en matériaux traités aux liants hydrauliques. Lors du calcul de ces structures, on considérera deux phases : initialement toutes les couches sont collées entre elles, et lors de la seconde phase de fonctionnement, l'interface entre la couche de base et la couche de fondation est glissante.

### 3.2.5 Les chaussées à structure inverse

Les chaussées à structure inverse correspondent à des chaussées mixtes dans lesquelles on intercalerait une couche de grave non traitée entre la couche bitumineuse et la couche traitée aux liants hydrauliques. L'épaisseur de cette couche supplémentaire est d'environ 12cm. Elle a pour fonction d'éviter la remontée des fissures consécutives au retrait et aux déformations thermiques de la couche de fondation rigide, qui permet quant à elle d'assurer aux autres couches un support de faible déformabilité. L'épaisseur totale des couches bitumineuses supérieures est de l'ordre de 15cm. Elles ont pour rôle d'assurer l'uni et l'étanchéité de la chaussée. L'épaisseur totale de la structure de chaussée est comprise entre 60 et 80cm. Pour ce type de structure, toutes les interfaces sont supposées collées.

### 3.2.6 Les chaussées en béton de ciment

Ces structures sont composées d'une couche de béton de ciment de 15 à 40cm d'épaisseur qui repose soit sur une couche de fondation en matériaux traités aux liants hydrauliques, en béton de ciment ou drainante non traitée, soit directement sur le sol support avec généralement dans ce cas interposition d'une couche bitumineuse. La structure peut éventuellement être recouverte d'une couche bitumineuse mince. La dalle en béton est la partie de la structure qui reprend en flexion quasiment tous les efforts induits par le trafic. La fissuration liée au retrait et aux déformations thermiques est contrôlée soit par la réalisation de joints transversaux (dalle discontinue avec ou sans éléments de liaison tels que des goujons), soit par un renforcement longitudinal ("béton armé continu" (BAC)) destiné à répartir par adhérence les déformations en créant ainsi de nombreuses fissures fines. Lors du calcul de ces structures, on considérera que toutes les couches sont collées entre elles sauf l'interface entre la couche de base et la couche de fondation qui est supposée glissante.

**Remarque :** Dans les chapitres suivants, le classement des différentes structures de chaussées sera simplifié et réduit à trois types :

- les chaussées souples : les couches sont soit en matériaux non traités, soit en matériaux traités aux liants hydrocarbonés.
- les chaussées rigides : ces chaussées sont constituées uniquement de béton de ciment vibré ou compacté.
- les chaussées semi-rigides : elles comprennent des matériaux traités aux liants hydrauliques et des matériaux traités aux liants hydrocarbonés.

## 3.3 La méthode de dimensionnement des chaussées neuves en France

Actuellement, la méthode de dimensionnement française ([LCPC-SETRA, 1994]) prend non seulement en compte les apports de la mécanique, pour le calcul des sollicitations et des déformations engendrées par la charge standard, mais aussi des éléments expérimentaux provenant des essais en laboratoire et des observations sur le terrain afin de déterminer les caractéristiques des matériaux employés et les critères de dimensionnement. De plus, elle a la particularité de proposer une approche probabiliste au problème.

### 3.3.1 Les données requises

L'objectif d'un dimensionnement de chaussée est de déterminer les matériaux et les épaisseurs des couches nécessaires pour que la structure soit capable de résister pendant une certaine durée, dans des conditions d'utilisation données. Les facteurs qui influent sur la tenue dans le temps de la chaussée sont donc : les matériaux utilisés, leur qualité de mise en oeuvre, le trafic et les données climatiques. Ces quatre données ont bien sûr la particularité de présenter une grande dispersion et un caractère aléatoire non négligeable dans le temps et dans l'espace. C'est la raison principale qui a motivé les ingénieurs à considérer les variables du problème en termes probabilistes. La durée de vie n'échappe donc pas à cette mesure.

#### La durée de vie initiale et le risque de calcul

Pour rester dans le cadre probabiliste choisi, il a été décidé de considérer non pas simplement une "durée de vie", mais plutôt une probabilité d'apparition de dégradations (le "risque de calcul") avant une période donnée de  $p$  années (la "durée initiale de calcul"). Dans [LCPC-SETRA, 1994], le risque de calcul est ainsi défini :

Classe	T5	T4	T3	T2	T1	T0	TS	TEX
Centres (MJA)			85	200	500	1200	3000	
Limites (MJA)	0	25	50	150	300	750	2000	5000

TABLEAU 3.2. Définition des classes de trafic [LCPC-SETRA, 1994]

Un risque de  $x\%$  sur une période de  $p$  années pris pour le dimensionnement de la chaussée, c'est la probabilité pour qu'apparaissent au cours de ces  $p$  années des désordres qui impliqueraient des travaux de renforcement assimilables à une reconstruction de la chaussée, en l'absence de toute intervention d'entretien structurel dans l'intervalle.

### Les matériaux utilisés

Dans le paragraphe 3.1, nous avons détaillé pour chaque type de couches et de matériaux, les caractéristiques physiques et mécaniques à prendre en compte. Pour ces matériaux normalisés, si une étude spécifique n'est pas réalisée, le guide de dimensionnement permet de se référer aux valeurs seuils minimales fixées par la norme. Dans le cas de matériaux non couverts par la norme, une étude en laboratoire particulière et/ou la réalisation de planches expérimentales doivent être prévues pour définir les caractéristiques à retenir.

### La qualité de réalisation

L'application des prescriptions et des règles de l'art, lors de la fabrication des matériaux, permet d'assurer une bonne homogénéité des compositions et de limiter les variations des caractéristiques mécaniques. Cependant, les variations aléatoires des épaisseurs des couches sont plus difficilement maîtrisables. Aussi, la méthode de dimensionnement prend en compte cette dispersion à partir d'observations faites sur le terrain.

### Le trafic

En ce qui concernent les sollicitations, seules celles dues au passage des poids lourds sont comptabilisées. En effet, on considère que l'agressivité induite par le trafic des véhicules légers est négligeable par rapport à celle créée par le passage de poids lourds. Le trafic est pris en compte dans le dimensionnement par l'intermédiaire de trois paramètres : le nombre d'essieux  $NE$ , le coefficient d'agressivité  $CAM$  et la classe de trafic.

Les charges à l'essieu étant variables d'un véhicule à l'autre, la méthode de dimensionnement considère un nombre cumulé  $NE$  de passages d'essieux de référence, équivalent au trafic réel sur la durée initiale retenue. En France, l'essieu de référence est l'essieu isolé à roues jumelées de 130kN.

L'agressivité d'une charge dépend non seulement de la configuration de la charge (essieu isolé ou tandem, roues simples ou jumelées) et de son intensité, mais aussi de la structure de la chaussée et des matériaux utilisés. Le coefficient d'agressivité  $CAM$  a pour fonction de traduire ces paramètres. Lorsqu'une estimation fiable de la composition du trafic n'est pas réalisable, le guide de dimensionnement propose une estimation de ce coefficient en fonction des variables citées précédemment.

La donnée du trafic est aussi nécessaire pour le choix de la qualité de certains constituants (dureté des granulats par exemple). Vis-à-vis de cet objectif, on considère en général une estimation du volume journalier du trafic poids lourds. C'est la notion de "classe de trafic", qui correspond à une "moyenne journalière annuelle" (MJA) durant l'année de mise en service. Le tableau Tab. 3.2 présente les limites de chaque classe.

### Les données climatiques

Les variations de température influencent les caractéristiques mécaniques des matériaux bitumineux et engendrent des déformations thermiques dans les matériaux à base de liants hydrauliques. Dans la partie 3.1.2, nous avons déjà introduit la notion de température équivalente  $\theta_{eq}$ , pour laquelle les calculs de dimensionnement sont réalisés. En France métropolitaine, elle est généralement

prise à  $15^{\circ}\text{C}$  mais le guide de dimensionnement propose aussi une méthode de calcul de ce paramètre dans le cas de conditions climatiques différentes.

La tenue de la chaussée aux phases de gel et dégel est également prise en compte dans le dimensionnement de la chaussée par une vérification séparée de celle de la tenue en fatigue. Elle consiste à définir un indice de gel admissible par la chaussée.

### 3.3.2 Les étapes du dimensionnement

La démarche de dimensionnement peut être scindée en cinq grandes étapes, dont le contenu est présenté ci-dessous :

#### a- Prédimensionnement

Le premier choix de la structure et des épaisseurs de couches peut se faire en se référant à des situations comparables. Ensuite, l'épaisseur de la couche de roulement est prédimensionnée en appliquant les principes proposés par le règlement :

- pour les chaussées souples à assises granulaires et couches de roulement peu épaisses : dans ce cas, le dimensionnement consiste en un calage avec des méthodes empiriques. La réglementation française [LCPC-SETRA, 1994] propose ainsi une épaisseur en fonction du trafic cumulé (Fig. 3.2).
- pour les chaussées à assises traitées aux liants hydrauliques : l'épaisseur de la couche de surface à mettre en place est déterminée sur la base de considérations empiriques vis-à-vis de la remontée de la fissuration (6cm pour les trafics T2 et inférieurs, 8cm pour les T1, de 10 à 14cm pour les T0 et supérieurs).
- pour les autres types de chaussées : dans ce dernier cas, l'épaisseur à mettre en place est fonction des limites technologiques de la technique choisie et du prédimensionnement de l'épaisseur totale de la structure de chaussée.

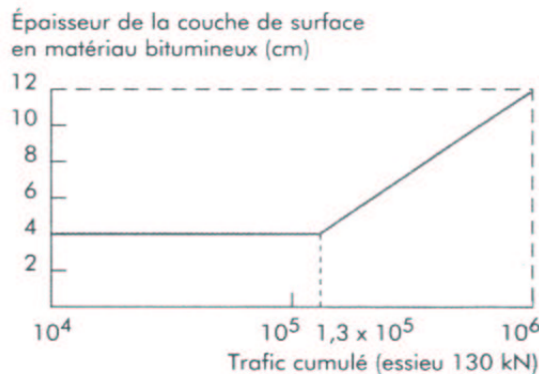


FIGURE 3.2. *Épaisseur de la couche de surface en matériaux bitumineux pour les chaussées à faible trafic, à assise granulaire [LCPC-SETRA, 1994]*

#### b- Calcul de la structure

La seconde étape correspond au calcul de la structure prédimensionnée. Différents modèles de la mécanique des chaussées ont été développés et selon leur type, il sont capables de prendre en compte ou non la présence de discontinuités tels que des fissures ([Tran, 2004]). En France, actuellement c'est le modèle mécanique de multicouche élastique de [Burmister, 1943] qui est le plus utilisé. Il a été implanté dans le logiciel de bureau d'étude ALIZE, développé par le [LCPC, 1964]. Il est considéré comme le logiciel de référence utilisé pour le dimensionnement des structures de chaussées et permet de calculer ([Autret et al., 1982] et [Baucheron de Boissoudy et George, 1988])

les déformations et les sollicitations mécaniques engendrées dans les chaussées non fissurées sous l'effet du trafic.

Le calcul de structure correspond à une analyse mécanique élastique statique du comportement de la structure de chaussée lorsqu'elle est soumise à la charge de l'essieu de référence de 130kN. Chaque demi-essieu est représenté par deux charges exerçant une pression uniformément répartie de 0.662MPa sur 2 disques de 0.125m de rayon, avec un entre-axe de 0.375m.

### c- Vérification du support et de la tenue en fatigue

Les valeurs de déformation et de contrainte obtenues par le calcul décrit précédemment sont ensuite comparées aux valeurs admissibles. Celles-ci sont déterminées en fonction du trafic cumulé, du risque de ruine, des caractéristiques de résistance en fatigue des matériaux, des effets thermiques et des observations sur site antérieures.

Pour tous les types de chaussées, la déformation verticale ( $\varepsilon_z$ ) admissible du sol-support est calculée, de la même manière, en fonction du trafic cumulé  $NE$ .

$$\begin{aligned} \text{Moyen et fort trafic } T \geq T3 : \quad & \varepsilon_{z,ad} = 0.012(NE)^{-0.222} \\ \text{Faible trafic } T < T3 : \quad & \varepsilon_{z,ad} = 0.016(NE)^{-0.222} \end{aligned}$$

La vérification de la tenue en fatigue se fait en termes de déformation en bas de couche  $\varepsilon_t$  pour les couches en matériaux traités aux liants hydrocarbonés, et en termes de contrainte en bas de couche  $\sigma_t$  pour les couches en matériaux à base de liants hydrauliques. Les valeurs admissibles s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{t,ad} &= \varepsilon(NE, \theta_{eq}, f) k_r k_c k_d k_s \\ \sigma_{t,ad} &= \sigma(NE, \theta_{eq}, f) k_r k_c k_d k_s \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon(NE, \theta_{eq}, f)$  et  $\sigma(NE, \theta_{eq}, f)$  déterminés à partir des lois de fatigue (3.2) et (3.1) et les coefficients de calage  $k_r, k_c, k_d, k_s$  tels que :

- $k_r$  : il ajuste la valeur admissible au risque de calcul en fonction de la dispersion sur l'épaisseur et sur les résultats des essais de fatigue.
- $k_c$  : il ajuste les résultats du modèle de calcul au comportement observé sur le terrain pour des chaussées de même type.
- $k_d$  : il minore la valeur admissible pour prendre en compte l'effet des discontinuités pour la couche de base. Il est uniquement appliqué à la couche de base si celle-ci est en matériaux traités aux liants hydrauliques.
- $k_s$  : il minore la valeur admissible pour tenir compte des hétérogénéités locales de portance d'une couche de faible rigidité supportant les couches liées. Il est uniquement appliqué à la couche de fondation.

### d- Ajustement des épaisseurs calculées

Cet ajustement est nécessaire pour prendre en compte les contraintes technologiques sur les épaisseurs maximales et minimales des couches et pour réduire les risques de défauts de liaison aux interfaces en limitant le nombre d'interfaces, ainsi que pour assurer une protection suffisante des assises vis-à-vis de phénomènes qui ne sont pas pris en compte dans les calculs tels que la remontée de fissures par exemple.

### e- Vérification de la tenue au gel-dégel

Cette dernière étape de vérification consiste à comparer l'indice de gel atmosphérique choisi comme référence  $IR$  à l'indice de gel admissible  $IA$ . Ainsi  $IR$  caractérise la rigueur de l'hiver dont

on souhaite protéger la chaussée et  $IA$  correspond à l'indice de gel que peut supporter la chaussée. Ce dernier dépend de la sensibilité au gel du sol-support, de la protection thermique et du rôle mécanique du corps de chaussée.

Une fois ces différentes étapes effectuées pour différentes structures potentielles, une comparaison économique globale permet de sélectionner la solution la plus intéressante.

## Conclusion

En France, le dimensionnement des chaussées neuves est basé sur une approche probabiliste du problème. La méthode proposée prend en compte les résultats d'une modélisation élastique de la structure mais aussi les informations issues d'essais en laboratoire et d'observations sur le terrain.

Par ailleurs, le cadre technico-économique dans lequel s'inscrit le choix d'une structure de chaussée et son dimensionnement comprend également la prévision de l'entretien et des travaux de réhabilitation nécessaires pour assurer le bon fonctionnement de l'ouvrage. Les défauts susceptibles d'apparaître dans une chaussée sont présentés dans le chapitre suivant.



## Chapitre 4

# La fissuration réfléctive ou “reflective cracking”

### Introduction

De nos jours, en France, le réseau routier étant déjà relativement dense, les préoccupations des maîtres d’ouvrage concernent autant la conservation de ce patrimoine que le développement d’infrastructures neuves.

Dans ce chapitre, nous proposons tout d’abord une analyse succincte du vieillissement des chaussées en général, puis nous nous concentrons sur les problèmes de fissuration. Nous étudions ensuite plus particulièrement le cas de la dégradation par fissuration réfléctive et les solutions qui existent actuellement pour retarder l’apparition de ce défaut.

### 4.1 Le vieillissement des structures de chaussées

#### 4.1.1 La qualité du réseau routier national

En France, le réseau routier comprenait, au 1er janvier 2003, 995000km de chaussées, dont 2500km d’autoroutes non concédées et 28100km de routes nationales. Depuis 1992, des campagnes systématiques d’évaluation de l’état des chaussées ont permis de restituer l’Image Qualité du Réseau National (IQRN - 1997) par catégorie de routes du réseau national non concédé (autoroutes non concédées + routes nationales). Ces résultats sont regroupés dans le Tab. 4.1.

Il ressort de cette campagne que le réseau est globalement en bon état (environ 65% des routes sont en bon ou excellent  tat). Par contre la proportion de routes en mauvais état n’est pas négligeable puisqu’elle représente 12% du réseau national. Cette partie du réseau relève plus de la problématique de réhabilitation que de la politique d’entretien.

Toutefois, dans chacun des deux cas il est nécessaire de connaître les types de dégradations pour choisir la méthode d’entretien ou de réparation.

	Excellent	Bon	Acceptable	Médiocre	Mauvais
Autoroutes (intra- ou extra-urbaine)	53%	28%	8%	5%	6%
Routes nationales	30%	33%	11%	13%	13%

TABLEAU 4.1. *Image Qualité du Réseau National en 1997 (www.route.equipement.gouv.fr)*

### 4.1.2 Les problèmes liés au vieillissement des structures de chaussées

Le catalogue des dégradations de surface des chaussées du [LCPC, 1998] classe les dégradations de chaussées suivant quatre types : les arrachements, les mouvements de matériaux, les dégradations de déformations et les fissures. Les deux premiers types correspondent à des défauts de surface et les deux derniers à des défauts de structure.

#### 4.1.2.1 Les dégradations révélant un défaut de surface

##### Les arrachements

Ce type de dégradations a lieu lorsque les gravillons de la couche de surface sont arrachés localement ou de façon plus généralisée, par usure. Le départ du liant autour des granulats est aussi observable.

##### Les mouvements de matériaux

Ce phénomène peut prendre diverses formes selon le matériau concerné :

- remontée du liant en surface
- enfoncement des gravillons en période chaude
- remontée des fines en surface
- éjection d’eau à la surface lors du passage de véhicules lourds par suite de l’existence de cavités sous la couche de surface.

Il est important de prendre en compte ces dégradations, lors de l’entretien d’une chaussée car elles peuvent engendrer des problèmes de sécurité routière, si l’adhérence et l’uni de la chaussée ne sont plus suffisants. Toutefois, dans ce mémoire, nous choisissons de nous concentrer sur les défauts plus structurels d’une chaussée.

#### 4.1.2.2 Les dégradations révélant un défaut de structure

##### Les dégradations de déformations

Elles apparaissent en surface sous la forme de déformations irréversibles et potentiellement nuisibles. L’orniérage est une dégradation qui fait partie de cette famille. Cet endommagement par fluage est favorisé par des températures élevées et un trafic lourd et lent. Il est essentiellement lié à un choix inadapté de la formulation et des matériaux. Les affaissements sont une autre forme de dégradations de déformations. Ils sont provoqués par une réduction de portance du sol-support, qui peut être induite par un sous-dimensionnement, des variations de l’état hydrique, une mauvaise qualité de l’assise ou encore un défaut de drainage. D’autres types de dégradations existent tels que les gonflements, phénomènes liés à l’existence de réactions physico-chimiques ponctuelles entre des constituants de la structure et l’eau, les bourrelets, les décalages de joints de dalle ou de bords de fissures, les flambements ou encore les déformations en forme de tôle ondulée aux environs des zones d’accélération et de freinage.

##### Les fissures

La fissuration des chaussées peut avoir différentes conséquences néfastes sur l’utilisation normale de la chaussée. D’un point de vue structurel, la résistance en fatigue des matériaux est réduite, le transfert de charge n’est plus continu et peut provoquer des déformations en surface et un poinçonnement du sol-support. L’étanchéité de la chaussée n’est plus assurée et l’eau et d’autres agents chimiques peuvent donc s’introduire et endommager les matériaux de la structure. Enfin

en surface, la fissuration provoque une augmentation de la rugosité de la chaussée et donc une diminution de confort et de durabilité.

Dans la section suivante nous reviendrons plus en détails sur les connaissances actuelles dans le domaine de la fissuration des chaussées.

### 4.1.3 La surveillance des dégradations

La notation des sections de routes est non seulement utile pour connaître l'état général du réseau routier et donc définir une politique national d'entretien, mais aussi, de façon plus localisée, pour mettre en application cette politique et suivre ses effets dans le temps.

Dans cette partie, nous présentons succinctement la méthode utilisée en France pour qualifier l'état des chaussées [LCPC-SETRA, 2000].

Le principe général consiste à affecter à chaque tronçon homogène de route une note reflétant la qualité de la chaussée : une note de 20 correspond à une chaussée neuve et 0 à une chaussée détruite. Cette note est attribuée en fonction du coût des travaux dits conventionnels qui seraient nécessaires pour passer de l'état constaté à l'état "équivalent neuf".

L'estimation de ces travaux repose sur la mesure d'indicateurs d'état appropriés. Ces indicateurs sont calculés à partir des informations obtenues lors du relevé visuel des dégradations. Ils sont fonction de la nature de la dégradation, de sa gravité et de la surface concernée. La mesure de ces facteurs est normalisée et détaillée dans [LCPC, 1997]. Les indicateurs d'état sont ensuite combinés suivant des grilles d'analyse faisant intervenir le trafic et le type de structure, pour finalement déterminer les épaisseurs de travaux conventionnels de remise en état. Si on appelle  $C$  le coût estimé des travaux conventionnels et  $C_{max}$  celui des travaux les plus lourds envisageables, correspondant à la remise à l'état "équivalent neuf" d'une chaussée à fort trafic très dégradée, la note d'état  $N$  d'un tronçon est alors donnée par la formule :

$$N = \text{Partie entière} \left[ 20 \left( 1 - \frac{C}{C_{max}} \right) \right]$$

Par ailleurs, les préoccupations du maître d'ouvrage peuvent se classer selon deux types : la conservation du patrimoine (structure, couche de roulement) et le maintien des qualités d'usage de la chaussée (sécurité, confort, bruit). La notation tient compte de ces deux objectifs en appliquant le calcul ci-dessus suivant deux orientations :  $N_p$  est la note d'état Patrimoine et  $N_s$  la note d'état Usage.

Ces deux notations permettent alors au maître d'ouvrage de définir les travaux d'entretien à réaliser à court et à long terme.

## 4.2 La fissuration dans les chaussées

Dans la section précédente, nous avons présenté les différentes dégradations qui peuvent avoir lieu lors du vieillissement d'une chaussée. Nous nous concentrons à présent sur les endommagements de type fissuration. Suivant le type de structure, le chargement appliqué, les matériaux utilisés et les conditions environnementales, la fissuration apparaît sous différentes formes. L'observation de ces défauts et la connaissance de l'histoire de la structure permet de déterminer l'origine de l'endommagement.

### 4.2.1 Les différentes causes de fissuration

La fissuration des chaussées est une dégradation très courante, qui a de multiples causes.

[Colombier, 1997] a proposé cinq familles de fissures selon l'origine de leur apparition :

- les fissures de fatigue : lorsque la chaussée a subi un trafic cumulé supérieur à sa limite, ce type de fissures peut apparaître. Toutes les couches de la structure peuvent être concernées ou ce phénomène peut être limité à la couche de roulement uniquement.
- les fissures de retrait : si une couche de longueur supposée infinie subit un retrait empêché, une fissuration de retrait peut apparaître à partir du moment où le frottement de cette couche sur le support est suffisant pour que la limite en traction soit atteinte. Le retrait peut être soit un retrait de prise, soit un retrait thermique. Ce phénomène a lieu essentiellement dans les couches à base de liants hydrauliques mais peut exister aussi pour les matériaux traités aux liants hydrocarbonés lorsque les conditions climatiques sont sévères.  
Considérons ce phénomène plus particulièrement dans le cas d'une chaussée à assise traitée aux liants hydrauliques. Dès la mise en place de ce matériau et le début de sa prise, la couche d'assise est en traction uniforme sur toute l'épaisseur. Le frottement sur le sol-support provoque alors l'apparition d'une fissure progressant du bas vers le haut. Simultanément, la différence d'hygrométrie induit une fissure du haut vers le bas. Les fissures n'ont donc pas un sens de propagation privilégié et la fissuration, même fine, de toute l'épaisseur peut être très rapide.
- les fissures liées aux mouvements du sol support : les mouvements du sol peuvent être provoqués par une réduction de portance du sol support, un tassement lent du support lorsque celui-ci est compressible ou mal compacté, un glissement de terrain, une déformation du support créée par le gel, ...
- les fissures de construction : elles ont pour origine des erreurs de dimensionnement ou de construction.
- les fissures de vieillissement : le vieillissement des bitumes combiné aux variations thermiques peut aussi être à l'origine d'une fissuration. En effet le vieillissement des matériaux bitumineux est plus sévère à la surface et a pour conséquence une augmentation du module de rigidité et une diminution de la capacité à relaxer les contraintes.

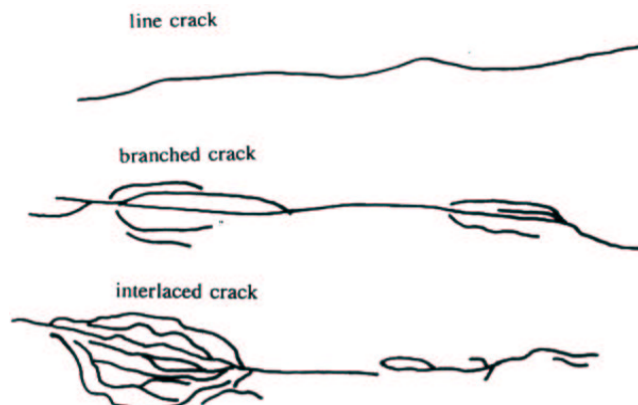
Ce classement permet de considérer toutes les causes de fissuration, mais l'apparition d'une fissure sur une chaussée réelle est souvent due à la combinaison de plusieurs phénomènes.

Toutefois il n'y a pas un unique type de fissuration. Dans le chapitre précédent nous avons déjà vu les principaux phénomènes susceptibles de causer une fissuration : la fatigue, le retrait, les mouvements du sol support, les défauts de construction et le vieillissement. La forme des fissures et la nature de la structure de chaussée représentent également des éléments permettant de comprendre leur apparition.

### 4.2.2 Les différentes formes de fissuration

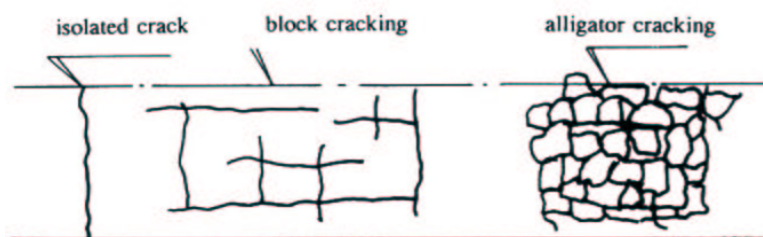
Les fissures sont en général rectilignes longitudinales ou transversales. Une forme sinueuse et une orientation diagonale ou parabolique sont très rarement observées. La largeur des fissures peut aller de quelques dixièmes de millimètres jusqu'à près de 1cm, selon l'origine de la fissuration et son avancée.

Elles se présentent en une seule branche (début de la dégradation), en deux ou plusieurs

FIGURE 4.1. *Les différents aspects des fissures [Colombier, 1997]*

branches, ou encore entrecroisées (dégradation avancée) (Fig. 4.1). Si on observe de façon plus global le motif de fissuration, on peut considérer trois cas (Fig. 4.2) :

- les fissures sont isolées les unes des autres,
- les fissures longitudinales et transversales s’entrecroisent et forment des blocs,
- les fissures s’entremêlent de façon très dense, on appelle “alligator cracking” ce type de fissuration.

FIGURE 4.2. *Les différents motifs des fissures [Colombier, 1997]*

### 4.2.3 La fissuration selon le type de chaussée

#### 4.2.3.1 Les fissurations affectant tous les types de chaussée

Les **mouvements du sol support** peuvent initier deux types de fissuration. Si ils sont dus à une réduction de portance ou à un tassement, les fissures peuvent être fines à moyennes. Elles sont rectilignes longitudinales ou transversales et vont jusqu’à former des blocs pour les chaussées semi-rigides et une fissuration très dense pour les chaussées souples. Le second type de fissuration est causé par le retrait d’un sol argileux ou par des glissements de terrain. Ces fissures sont larges et profondes. Elles sont longitudinales ou transversales dans le cas du retrait d’un sol argileux. Lorsqu’elles sont induites par un glissement de terrain, elles s’orientent selon le plan de glissement.

Par ailleurs, des fissurations peuvent apparaître aussi lorsqu’un **élargissement de voie** a été réalisé sans que la continuité de la structure soit bien assurée. Ce type de fissure est souvent linéaire et assez large.

La **fissuration initiée en surface** est aussi commune à tous les types de structure. Appelée généralement “top-down cracking”, elle peut être expliquée par différents phénomènes. Le premier est la fatigue des matériaux bitumineux. Les fissures créées sont fines et localisées dans les bandes

de roulement. Elles tendent ensuite à former des “alligator cracking” sur toute la surface. Les variations thermiques influent également sur la fissuration de surface ([Nesnas et Nunn, 2004]). En effet, la couche de roulement subit une contraction en été et une dilatation en hiver, qui peut conduire à un gondolement de la surface et une fissuration lorsque la limite en traction du matériau est atteinte. Ceci est d’autant plus accentué que le gradient thermique sur l’épaisseur de la couche crée lui aussi un gradient de déformation. La largeur de ces fissures dépend de la période de l’année : large en hiver et fine en été. L’existence de chaussées fissurées n’ayant subies aucune charge de trafic illustre cette théorie. Le troisième phénomène est le vieillissement des matériaux bitumineux de surface ([Nesnas et Nunn, 2004]). En altérant les caractéristiques mécaniques du matériau, il accélère les deux scénarios précédents.

[Molenaar et Potter, 1997] et [Molenaar, 2004] proposent une explication supplémentaire au développement de fissures se propageant du haut vers le bas. Celle-ci concerne la configuration de la charge prise en compte. En effet, de manière courante, on considère que la charge de trafic peut être modélisée comme une pression uniforme sur un disque. En réalité, cette distribution est plus complexe (Fig. 4.3) : la composante verticale n’est pas uniforme et s’inscrit dans un rectangle. De plus elle comporte aussi une composante horizontale de cisaillement. La prise en compte d’une distribution de charge plus réaliste fait apparaître des déformations de surface très localisées susceptibles de créer des amorfes de fissures.

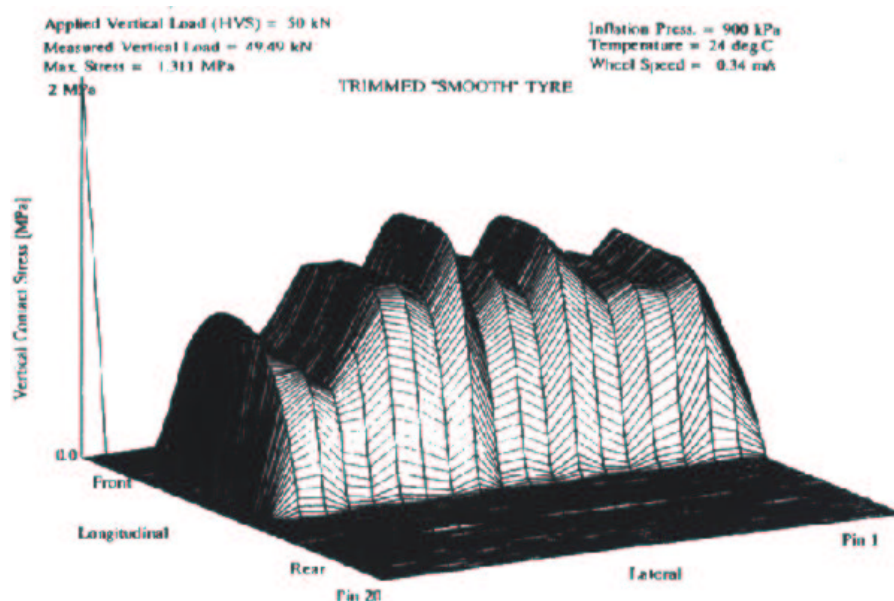


FIGURE 4.3. *Pression de contact verticale appliquée par une charge de 50kN avec une pression de gonflement de 900kPa [Molenaar et Potter, 1997]*

Enfin, si l’on considère le caractère viscoélastique des matériaux bitumineux, les calculs effectués par [Tamagny et al., 2004], montrent qu’une contrainte de traction apparaît après le passage de la charge (Fig. 4.4).

#### 4.2.3.2 Les fissurations typiques pour chaque type de chaussée

##### Les chaussées souples

Les fissures apparaissant en surface peuvent provenir de la rupture en fatigue des couches d’assise, sous l’action du trafic. Dans la première phase de dégradation elles sont localisées dans la bande de roulement. Elles s’étendent ensuite sur toute la surface avec un motif en blocs.

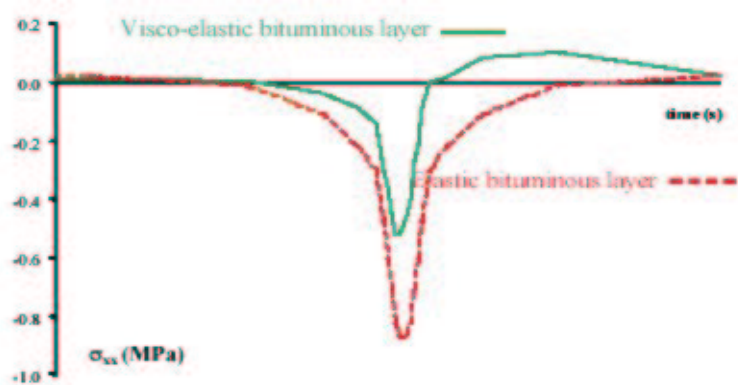


FIGURE 4.4. *Contrainte longitudinale en fonction du temps sous le centre de la charge roulante à une profondeur de 0.0165m [Tamagny et al., 2004]*

Dans des conditions climatiques sévères, à très basses températures, les couches bitumineuses peuvent être sujettes au retrait thermique. Les fissures sont alors transversales et régulièrement espacées.

### Les chaussées rigides

Les joints de constructions dans les chaussées en béton peuvent être considérés de la même manière que des fissures. Ils sont assez larges en surface mais souvent colmatés. De la même manière que les fissures, il se développent en fonction du trafic et des conditions climatiques. Leur dégradation peut mener à des fêlures sur les côtés des dalles et à des défauts de transfert de charge entre dalles, entraînant des mouvements verticaux relatifs entre deux dalles attenantes lors du passage de véhicules.

Par ailleurs, si ces joints ont été mal réalisés ou sont insuffisants, des fissures de retrait peuvent apparaître. Elles sont rectilignes, transversales, leur largeur et leur espacement varient en fonction de la structure et des conditions climatiques.

Enfin, si la structure complète est mal dimensionnée (épaisseur de la dalle insuffisante, portance du sol trop faible), la dalle en béton peut se casser sous la charge de véhicules lourds. Les fissures sont alors longitudinale, transversale ou localisées uniquement dans les coins.

### Les chaussées semi-rigides

Les assises traitées aux liants hydrauliques sont soumises au retrait (retrait au jeune âge et retrait thermique) mais ne sont pas toujours munies de joints de construction. Les fissures de retrait créent des points sensibles à la base de la couche bitumineuse et c'est ainsi que des fissures apparaissent rapidement dans cette couche et remontent jusqu'à la surface. Les défauts de l'ancienne structure sont ainsi réfléchis en surface, c'est ce qu'on appelle "la fissuration réfléctive". Elles sont espacées de 5 à 15m et leur largeur varie en fonction de la température (quelques dixièmes de mm à quelques mm). Ce sont en général des fissures rectilignes avec une seule branche, mais elles peuvent se ramifier sous l'action du trafic. Si des joints de construction existent, le phénomène de remontée à travers la couche de roulement est le même. L'espacement des fissures dépend alors de l'espacement entre les joints. Ce type de rupture fait l'objet de la suite du mémoire.

En outre, lorsque les assises sont sous-dimensionnées ou qu'elles ont atteint leur limite de durée de vie, elles peuvent rompre en fatigue et causer une fissuration en blocs ou de type "alligator cracking".

### 4.3 Le phénomène de fissuration réflexive ou “reflective cracking” dans les chaussées semi-rigides

Dans la partie précédente, nous avons étudié la fissuration selon le type de structure. A présent, nous limitons cette analyse au cas des chaussées semi-rigides et à la fissuration réflexive. Nous rappelons qu’elle est généralement liée au fait que les mouvements des lèvres d’une fissure préexistante (joint de construction ou fissure de retrait de l’assise), sous l’action de différentes charges (trafic, variations thermiques, qualité du drainage du sol), est transmise à la couche supérieure et induit une concentration de contraintes et ultérieurement une propagation de la fissure jusqu’à la surface. Selon le type de chargement, différents modes de fissuration, ou mouvements des lèvres de la fissure, sont envisageables.

#### 4.3.1 Les modes de fissuration

Le mouvement des lèvres d’une fissure est caractérisé par trois modes bien connus, proposés par [Irwin, 1957].

##### Mode I

Le mode I correspond à l’ouverture de la fissure (Fig. 4.5).

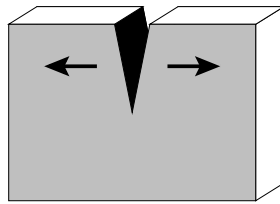


FIGURE 4.5. *Mode I : ouverture*

Les déformations d’origine thermique et le retrait au jeune âge de la couche d’assise provoque ce type de mode (schéma 1 de la Fig. 4.8). De même, lorsque la charge de trafic se trouve au droit d’une fissure transversale, les lèvres de la fissure tendent à s’ouvrir (schéma 2 de la Fig. 4.8). Enfin si un véhicule roule à cheval sur une fissure longitudinale, il provoque l’ouverture de la fissure et donc un mode I.

##### Mode II

Le mode II correspond au cisaillement des lèvres de la fissure (Fig. 4.6).

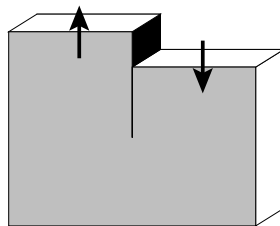


FIGURE 4.6. *Mode II : cisaillement*

Lorsque la charge de trafic est décalée par rapport au centre d’une fissure transversale et qu’elle se trouve au bord de la discontinuité, le mouvement des lèvres de la fissure correspond au mode II



(schéma 2 de la Fig. 4.8). Il en est de même lorsqu'un véhicule passe le long d'une fissure longitudinale (schéma 3 de la Fig. 4.8).

### Mode III

Le mode III correspond à une déformation de déchirement des lèvres de la fissure (Fig. 4.7).

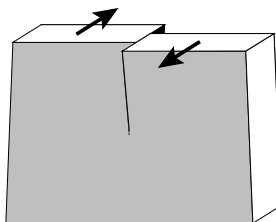


FIGURE 4.7. *Mode III : déchirement*

Ce cas peut se rencontrer lorsqu'un véhicule arrive à l'extrémité d'une fissure longitudinale.

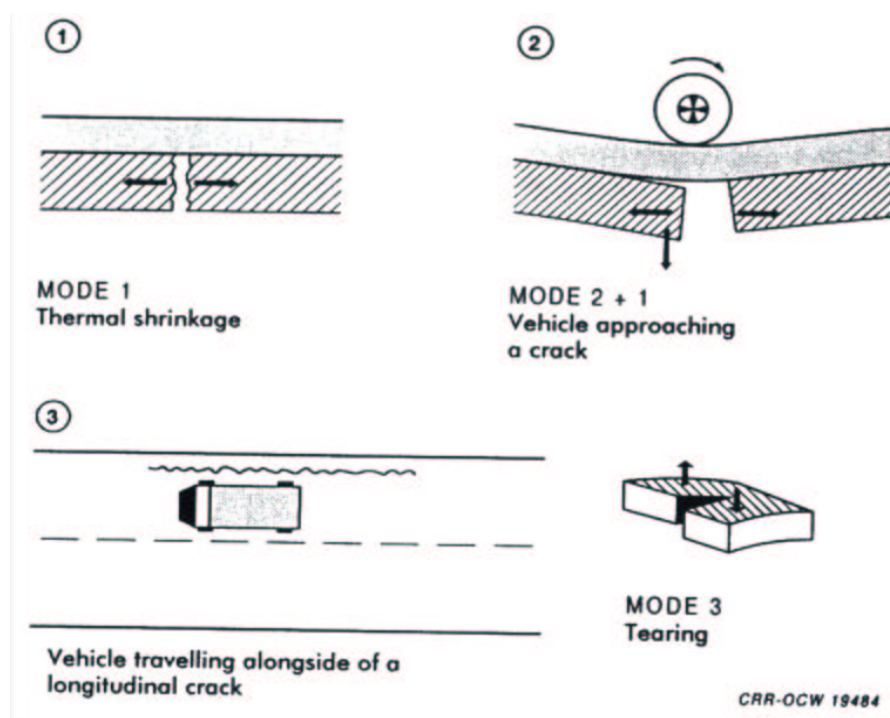


FIGURE 4.8. *Les mouvements possibles des lèvres de la fissure [Colombier, 1997]*

#### 4.3.2 Contribution des différents chargements

Nous pouvons considérer que les chargements prédominants sont le trafic et les variations thermiques. Si nous considérons uniquement une fissuration transversale, nous avons vu que les variations thermiques activent un mode I alors que le trafic, selon la position de la charge provoque un mouvement soit de type mode I, soit de type mode II. La question qui se pose à présent est de quantifier la contribution de chacun de ces trois cas à la progression de la fissure.

Le paramètre le plus courant de quantification de la progression d'une fissure est le facteur d'intensité de contrainte. Il permet de décrire l'état de contrainte en pointe de fissure. Dans l'état de l'art qu'ils proposent, [Molenaar et Potter, 1997] reprennent les travaux de [Lytton, 1989] concernant une approche théorique simplifiée du problème. Les facteurs d'intensité de contraintes induits par le trafic ( $K_{tr}$ ) et par les variations thermiques ( $K_T$ ) sont calculés dans le cas de la propagation d'une fissure à travers une poutre reposant sur une fondation élastique.  $K_{tr}$  (respectivement  $K_T$ ) dépendent de nombreux facteurs dont le facteur d'intensité de contraintes adimensionnel  $k_{tr}$  (respectivement  $k_T$ ) qui dépend lui-même du rapport  $c/d$  ( $c$  : longueur de la fissure et  $d$  : épaisseur totale de la chaussée existante et de la couche supérieure ajoutée), du transfert de charge au passage de la fissure et du type de charge généré ( $k_b$  : flexion mode I et  $k_s$  : cisaillement mode II). Les figures Fig. 4.9 et Fig. 4.10 montrent l'évolution de  $k_{tr}$  et  $k_T$  en fonction des différents facteurs.

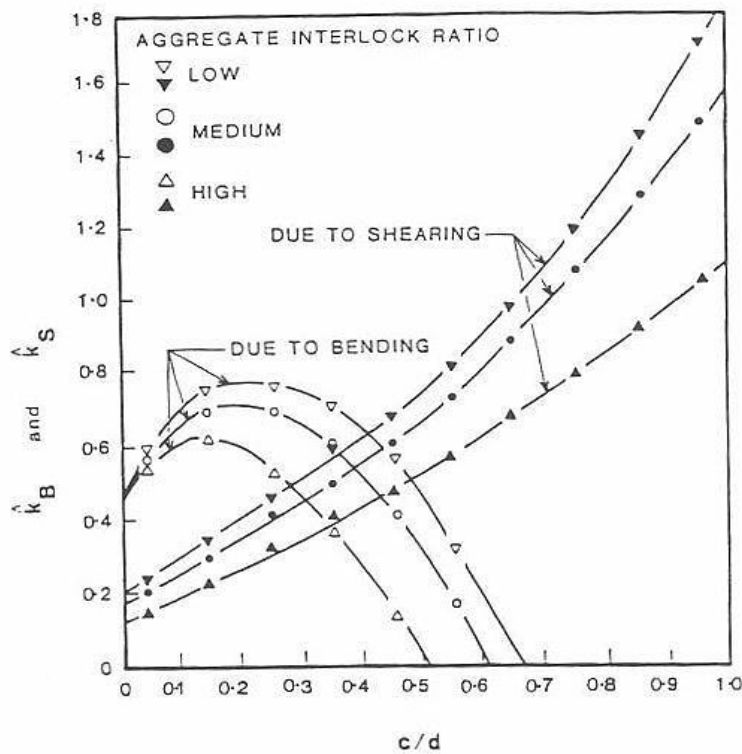


FIGURE 4.9. Facteurs d'intensité de contrainte de trafic adimensionnels en mode I et II en fonction de la longueur de fissure adimensionnelle ( $c/d$ , où  $c$  et  $d$  représentent la longueur de la fissure et l'épaisseur totale de la chaussée existante et de la couche supérieure ajoutée, respectivement) [Lytton, 1989]

Concernant le trafic, cette étude montre clairement que le facteur d'intensité de contrainte correspondant au mode II augmente avec la longueur de la fissure. Par contre, le mode I apparaît comme prédominant dans la phase d'initiation. Puis après avoir atteint un maximum, son intensité décroît lorsque la fissure se propage. Le facteur d'intensité de contrainte lié au chargement thermique est croissant lorsque la fissure se propage mais tend à se stabiliser lorsqu'elle a atteint la moitié de l'épaisseur ( $c/d > 0.5$ ). Des calculs par éléments finis menés par [Foulkes et Kennedy, 1986] aboutissent à des conclusions semblables.

Ces travaux mettent donc en évidence l'importance du facteur  $c/d$  et de la prise en compte de l'effet combiné des deux types de modes de propagation de la fissure. Notons toutefois que l'analyse est effectuée avec un comportement élastique des matériaux.

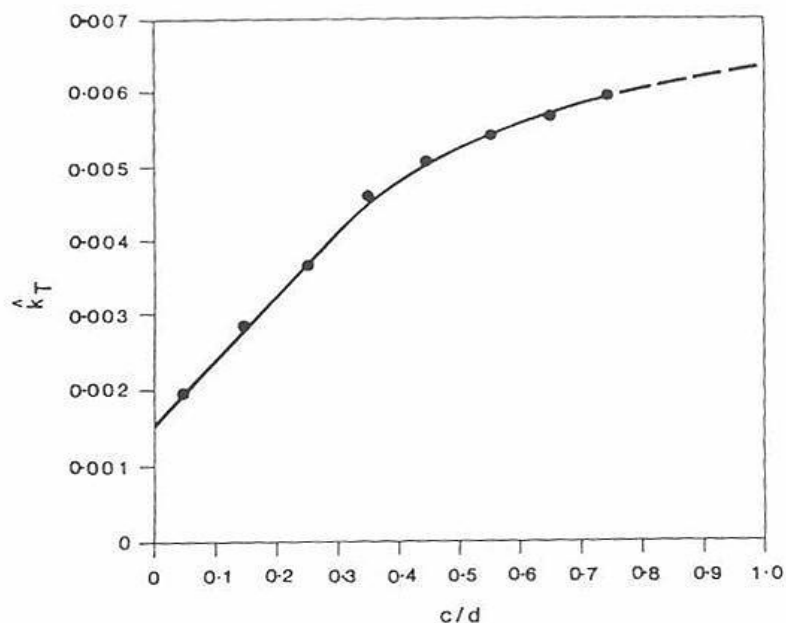


FIGURE 4.10. Facteurs d'intensité de contrainte thermique adimensionnels en mode I en fonction de la longueur de fissure adimensionnelle ( $c/d$ , où  $c$  et  $d$  représentent la longueur de la fissure et l'épaisseur totale de la chaussée existante et de la couche supérieure ajoutée, respectivement) [Lytton, 1989]

### 4.3.3 Schématisation du développement d'une fissure réfléctive

Le développement d'une fissure réfléctive dans la couche supérieure est caractérisée par trois phases :

- l'initiation de la fissure : elle est induite par la présence d'un défaut déjà présent dans la couche non fissurée ou par la discontinuité créée par la présence d'un joint ou d'une fissure dans la couche inférieure. Cette phase est plus ou moins longue selon le niveau de chargement (intensité des concentrations de contraintes), les caractéristiques mécaniques de la couche supérieure et la qualité de l'interface entre les deux couches.
- la propagation de la fissure dans la couche bitumineuse : la durée de cette phase dépend de l'épaisseur de la couche, de sa rigidité et du chargement.
- la rupture de la couche : elle est rapide et se traduit par l'apparition de la fissure à la surface.

Les différentes possibilités de progression d'une fissure réfléctive, sous un chargement thermique et une charge de trafic, ont été décrites par [Goacolou et Marchand, 1982]. Il apparaît que la propagation d'une fissure est régie par la potentialité des deux options : propagation verticale (Fig. 4.11 schéma 1) et décollement de l'interface (Fig. 4.11 schéma 2).

Selon le schéma de propagation, le temps de remontée de la fissure à travers la couche supérieure est plus ou moins long. Un décollement de l'interface conduit à un allongement de cette durée mais aussi à un état de la structure plus défavorable (désolidarisation des couches).

[LCPC, 1988] propose une analyse de ce schéma en modélisant en élasticité linéaire une structure semi-rigide. Si l'on considère uniquement le chargement thermique et donc une mise sous contraintes horizontales, la fissure tend à se propager vers la surface et des forces de décollement de l'interface apparaissent également.

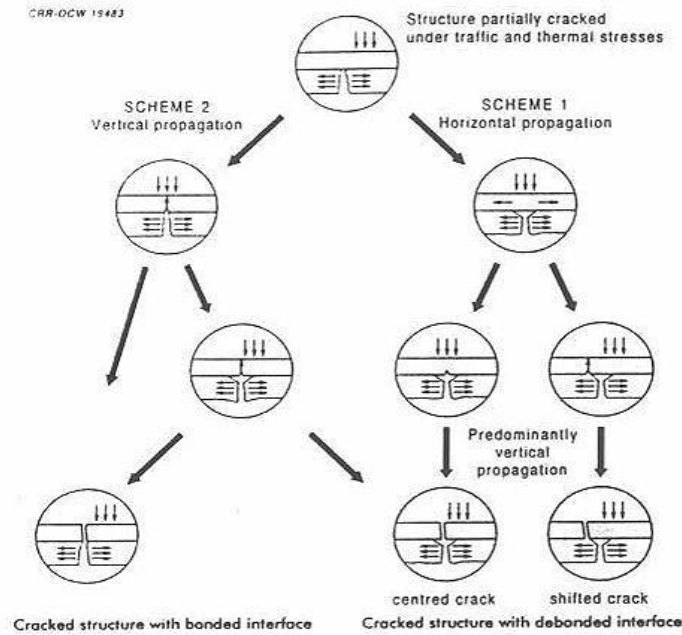


FIGURE 4.11. *Le développement de la fissuration. Structure partiellement fissurée sous chargement thermique et de trafic (Schéma 1 : Propagation horizontale - propagation verticale prédominante - Fissure centrée - Fissure décentrée - Structure fissurée avec interface décollée. Schéma 2 : Propagation verticale - Structure fissurée avec interface collée [Goacolou et Marchand, 1982]*

Lorsque cette structure est soumise à une charge de trafic et que celle-ci est centrée sur la fissure, le calcul montre que, si l'épaisseur et le module de la couche supérieure ne sont pas trop élevés vis-à-vis des autres couches, les contraintes qui s'exercent sur le front de fissuration tendent à refermer la fissure. Par contre, lorsque la charge est excentrée par rapport à la fissure, même si les contraintes vont dans le sens d'une fermeture de la fissure verticale, elles tendent à décoller les deux couches. Il apparaît également que dans une première phase, la force provoquant le décollement augmente avec la longueur décollée et décroît ensuite. A partir d'une certaine longueur décollée il y a donc arrêt de la propagation horizontale. Par contre, si l'on étudie le cas d'une structure partiellement décollée soumise à une charge centrée, des contraintes de traction au bas de la couche supérieure apparaissent. Le phénomène de fatigue sous chargements répétés peut alors créer une amorce de fissuration verticale.

Le calcul du temps de remontée de la fissure soumise à la combinaison de ces deux chargements passe par un calcul du facteur d'intensité de contraintes spécifique à chaque cas de sollicitations. Il est calculé de façon analytique pour le chargement thermique et par une modélisation par éléments finis pour le chargement de trafic. Pour la structure étudiée, il apparaît qu'en début de fissuration, la vitesse de propagation est très lente sous l'action du trafic mais très rapide sous l'action des variations thermiques. Ce phénomène s'inverse en fin de propagation. Les courbes suivantes (Fig. 4.12) illustrent cette remarque. Elles représentent, pour différents cas d'agressivité des deux types de sollicitation, la hauteur fissurée  $f$  normalisée par l'épaisseur de la couche de roulement  $h$  en fonction du nombre de jours  $J$  normalisé par  $J_0$ , le temps de remontée lorsque l'effet du trafic est négligé.

Les travaux réalisés par [Jun et al., 2004] abordent également le problème avec une approche de type mécanique de la rupture. Les auteurs retrouvent bien les conclusions décrites ci-dessus et montrent de plus que si le module de la couche bitumineuse augmente, le facteur d'intensité

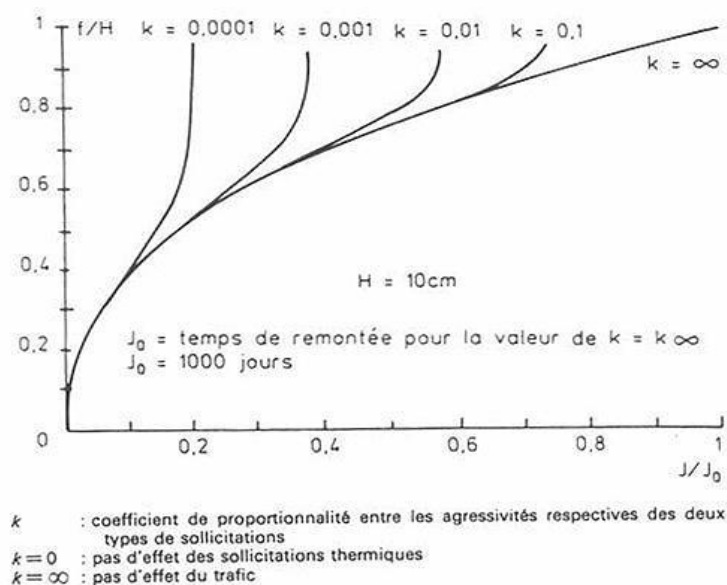


FIGURE 4.12. Evolution de la hauteur fissurée  $f$  en fonction du temps  $J$  en jours [LCPC, 1988]

de contrainte lié au mode II augmente aussi rapidement. Ainsi, la propagation de la fissure est accélérée en hiver, ce qui est cohérent avec les observations de terrain.

Ces résultats analytiques, issus d'un calcul élastique de la chaussée, conduisent à conclure que la vitesse de remontée de la fissuration est imposée dans une première phase par les sollicitations thermiques, puis l'influence du trafic entre en jeu et tend à devenir prépondérante en fin de propagation.

Connaissant à présent le fonctionnement de ce type de chaussées endommagées, nous proposons de nous intéresser dans le chapitre suivant aux moyens existants pour palier à ce défaut.

## 4.4 Les solutions actuelles pour ralentir la remontée des fissures

La fissuration réfléctive peut être schématisée comme la succession de trois phénomènes : la fissuration de retrait de l'assise traitée aux liants hydrauliques, l'initiation de la fissuration dans la couche bitumineuse supérieure par réflexion de la discontinuité inférieure et la propagation de cette fissuration jusqu'à la surface. Une solution efficace pour ralentir la remontée des fissures doit donc avoir pour but de retarder au moins un de ces trois événements.

### 4.4.1 Réduire la fissuration des matériaux traités aux liants hydrauliques

La première approche de ce problème a été celle de l'amélioration des caractéristiques des matériaux hydrauliques utilisés dans la couche d'assise.

Tout d'abord, les recherches se sont orientées vers la modification des ciments. Ainsi, par exemple des planches d'essais ont été réalisées en utilisant des ciments dits à retrait compensé [LCPC, 1988]. Le principe de ces liants est d'utiliser une quantité suffisante de produits gonflants tels que l'ettringite pour compenser le retrait de prise. Cependant, le retrait thermique, dont l'influence est plus conséquente, n'est en rien modifié par l'introduction de tels produits. Cette solution n'a donc pas été reconnue comme efficace pour éliminer ou au moins retarder la fissuration.

Des études ont également été engagées pour tester des solutions de traitement mixte, c'est-à-dire des mélanges dans lesquels est ajouté un produit autre que le liant hydraulique. Selon les adjuvants testés, l'objectif différait. Ainsi, des émulsions bitumineuses ont été introduites dans des graves ciments afin d'augmenter la déformabilité, ou la souplesse, du matériau sans trop réduire sa résistance à la traction. Cependant quelque soit la mise en oeuvre adoptée (préenrobage des granulats par une émulsion à rupture lente ou ajout d'une émulsion à rupture rapide au moment du malaxage des granulats et des liants), la réduction de fissuration sur chantier n'a pas été sensible.

Les résines époxydiques ont également été proposées comme adjuvant aux graves ciments. Dans ce cas, le but visé est de créer un matériau composite dont la résistance en traction est plus grande que celle de la grave ciment classique. Cependant même si le comportement à la fissuration est légèrement amélioré, les essais sur chantier ont montré que cette amélioration n'était pas suffisante.

Toutefois le problème peut aussi être abordé sous un autre angle. Au lieu de vouloir éviter la fissuration dans la couche d'assise, on peut accepter cet endommagement et le provoquer afin de mieux le contrôler.

#### 4.4.2 Provoquer et localiser la fissuration

Si on considère que la fissuration des couches traitées avec un liant hydraulique est inéluctable, alors une approche différente du problème est de vouloir contrôler cette fissuration. D'une part, si les fissures sont plus proches les une des autres, elles sont plus fines et les mouvements qu'elles provoquent sont de plus faible intensité. L'endommagement peut ainsi être retardé. D'autre part, la possibilité de localiser la fissure permet non seulement de réaliser un traitement préventif à cet endroit mais aussi de faciliter l'entretien de la chaussée puisqu'on maîtrise aussi sa linéarité.

Il existe différentes techniques de préfissuration. On peut distinguer les méthodes de création de fissures non ordonnées qui mettent en application le premier avantage cité ci-dessus, et les méthodes de création de fissures ordonnées, qui elles, utilisent les deux points positifs cités précédemment.

La Fig. 4.13 présente les différentes méthodes de préfissuration ordonnée.

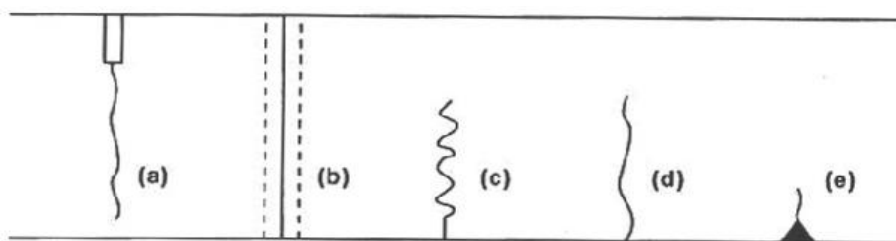


FIGURE 4.13. Schématisation des techniques de préfissuration [Vanelstraete et de Bondt, 1997]

Les plus simples consistent à provoquer une fissure en réduisant la section localement. Ceci peut se faire soit en entaillant le haut de la couche (Fig. 4.13 (a)), soit en plaçant un profilé en bas de couche (Fig. 4.13 (e)).

Par ailleurs, ces méthodes peuvent être améliorées suivant différents points de vue. Le procédé CRAFT (Création Automatique de Fissures Transversales), mis au point par l'entreprise Cochery Bourdin et Chaussée (groupe Eurovia), permet d'assurer l'étanchéité de la couche (Fig. 4.13 (b)). En effet, l'entaille est réalisée sur toute l'épaisseur avant compactage et un film bitumineux y est inséré. De cette manière, la fissuration est localisée dans ces zones de plus faible résistance et la couche reste étanche.

La méthode schématisée sur la (Fig. 4.13 (c)) est appelée “joint actif”. Elle a été brevetée par SETEC Géotechnique et consiste à provoquer une fissure en insérant un profil ondulé en bas de

couche sur 2/3 de l'épaisseur. Quant au procédé OLIVIA (Fig. 4.13 (d)) développé par l'entreprise Viafrance (groupe Eurovia), il met en oeuvre une bande plastique flexible. Ces deux méthodes améliorent la technique de préfissuration simple en assurant un bon transfert de charge grâce à la forme ondulée du profil ou à la déformabilité de la bande plastique.

En ce qui concerne la préfissuration non ordonnée ([LCPC, 1988]), elle a pour but de réduire l'amplitude de variation des ouvertures de fissure dues au retrait thermique, en augmentant le nombre de fissures. Les structures obtenues sont appelées structures micro ou multifissurées. La multitude des discontinuités doit conduire à un fonctionnement pseudo-continu, empêchant la fissuration de la couche de roulement. Par contre elle engendre évidemment une perte de la capacité portante de l'assise, qui doit être prise en compte lors du dimensionnement.

La rupture non ordonnée peut être obtenue en profitant du trafic du chantier sur l'assise traitée, ou encore en utilisant des masses tombantes ou un rouleau vibrant. La méthode appelée “crack and seat” appartient à ce type de technique. Après la fissuration aléatoire, elle met en oeuvre une stabilisation de l'assise au rouleau compacteur.

Ces différentes techniques sont déjà largement utilisées sur chantier. Récemment, une étude comparative a été effectuée au Royaume-Uni ([Ellis et Dudgeon, 2004]). Ainsi, sur une même structure de chaussées, trois techniques de préfissuration ont pu être testées : le procédé OLIVIA décrit plus haut et deux méthodes qui consistent à réaliser une encoche en haut de couche (Fig. 4.13 (a)) soit en utilisant un plateau vibrant (“vibrating plate”), soit en laissant tomber une lame (“guillotine”).

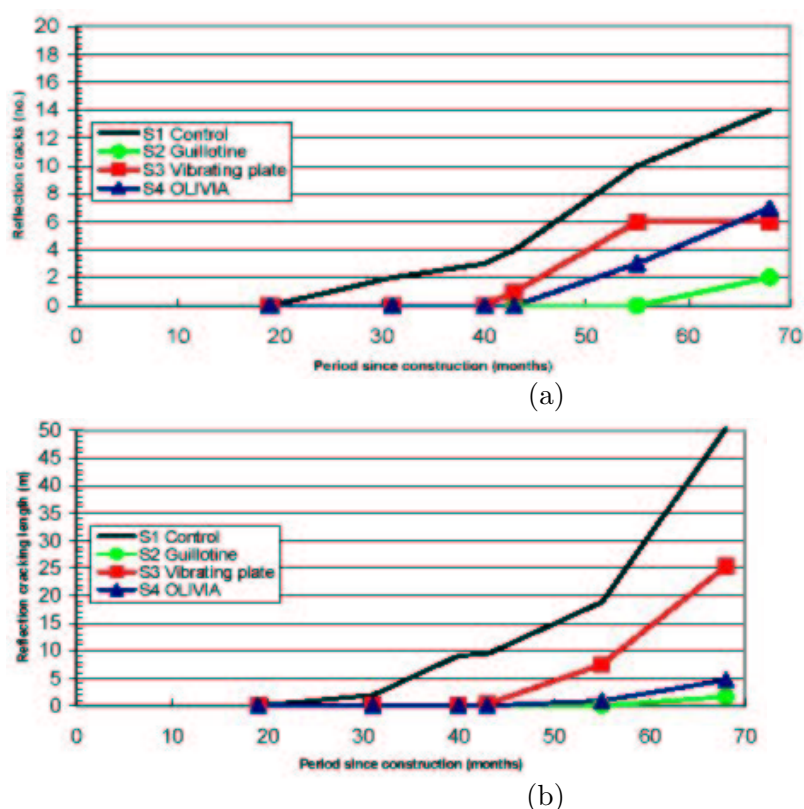


FIGURE 4.14. Fissuration réfléctive en termes de (a) nombre de fissures et (b) longueur de fissures [Ellis et Dudgeon, 2004]

La figure Fig. 4.14 montrent les bonnes performances de ces techniques. Quelque soit le type de préfissuration employé, la fissuration des sections traitées est moindre que celle de la section de référence. La méthode appelée “guillotine” semble fournir de meilleurs résultats que les deux

autres mais cette conclusion est à nuancer car d’autres paramètres de mise en place interviennent (expérience de la main d’oeuvre par exemple) mais n’apparaissent pas sur ces graphiques.

Les techniques présentées dans ce paragraphe, et plus particulièrement les méthodes de création de fissures ordonnées dont les premières expérimentations en France datent des années 60, ont prouvé leur efficacité sur chantier pour ralentir l’apparition de la fissuration en surface. Toutefois cette durée peut être encore allongée en combinant la préfissuration à une technique retardatrice de fissuration dans la couche supérieure.

#### 4.4.3 Ralentir la remontée de la fissuration dans la couche supérieure

Pour ralentir la remontée de fissure, les solutions doivent viser au moins un des deux objectifs suivants ([STBA, 1999] et [Zhang et Li, 2002]) :

- renforcer et améliorer la résistance à la propagation de la fissure dans la nouvelle couche bitumineuse mise en place
- conduire la propagation de la fissure de manière à allonger son temps de parcours avant son arrivée à la surface.

##### 4.4.3.1 La préparation des couches existantes

Les techniques retardatrices de fissuration sont d’autant plus efficaces lorsqu’elles sont mises en oeuvre sur un support uniforme dont les fissures existantes ont été traitées. On distingue deux types de méthodes de traitement. Le premier type repose sur la multiplication de la fissuration de façon ordonnée ou non (voir paragraphe 4.4.2). La seconde catégorie de méthodes consiste à reboucher les fissures. Le matériau d’injection est soit un mortier de ciment ou une résine epoxy pour limiter les mouvements de la discontinuité, soit un bitume ou un bitume modifié pour assurer une nouvelle étanchéité de la couche d’assise.

##### 4.4.3.2 Les systèmes retardateurs de fissuration

Un système retardateur de fissuration (“overlay system”) est composé d’une couche d’accrochage et de nivellement, d’une interface et d’une couche bitumineuse supérieure. Selon le niveau et les causes des dégradations, un ou plus des trois éléments peut être omis.

La couche d’accrochage et de nivellement est en général une couche fine en matériau bitumineux, dont la taille des granulats ne dépasse pas 7mm. Elle permet de créer une surface uniforme et une liaison adaptée entre les anciennes et les nouvelles couches. En effet la qualité de l’adhérence entre ces deux matériaux est un facteur important de l’efficacité des solutions employées. Elle doit permettre une bonne répartition des contraintes induites par le trafic sur la structure. En cas de liaison faible, les matériaux peuvent rapidement être ruinés en fatigue, ou un délaminage peut faire apparaître des fissures supplémentaires.

Il existe différentes interfaces dont le rôle est variable suivant les matériaux utilisés et le type de fabrication. [Vanelstraete et de Bondt, 1997] proposent trois catégories d’interface suivant la fonction recherchée :

- les interfaces souples : elles résistent aux grandes déformations à proximité des fissures,
- les interfaces rigides : elles renforcent les couches et limitent ainsi les déformations dans la couche de roulement,
- les interfaces étanches : elles évitent les infiltrations dans la structure.



Bien entendu, si la forme et la mise en place le permettent, des combinaisons de deux systèmes et donc de deux fonctions sont possibles.

Les interfaces les plus couramment utilisées sont décrites dans les paragraphes suivants à partir de l'état de l'art établi par [Vanelstraete et de Bondt, 1997] et [CRR, 1995].

**Sable enrobé :** C'est un mélange de sable (granulométrie de 0/2mm à 0/6mm) et de bitume modifié ou non. En général la teneur en fines ( $< 0.08mm$ ) est comprise entre 10 et 15% et la composition est riche en bitume à hauteur de 8 à 12%. Il est mis en place avec une épaisseur inférieure ou égale à 20mm, sur une couche d'accrochage. Celle-ci consiste en une émulsion de bitume (300 à 500g/m<sup>2</sup>). Cette interface fait partie de la catégorie des interfaces souples. C'est sans doute le système retardateur de fissure le plus utilisé en France, puisque tous les grandes entreprises routières proposent un produit de ce type.

**SAMI Stress Absorbing Membrane Interlayers :** c'est une couche épaisse (2.5kg/m<sup>2</sup>) de liant bitumineux, de préférence enrichie en polymères et généralement gravillonnée. Elle est mise en place directement sur l'ancien support sans couche d'accrochage. Le matériau utilisé nous permet de la classer dans les interfaces souples. Toutefois ce type de système présente aussi de très bonnes propriétés d'étanchéisation.

**Membrane non tissée :** c'est une membrane géotextile en polypropylène ou en polyester. Son épaisseur maximale est de quelques millimètres. Elle est mise en place sur une épaisse couche de liant, de préférence enrichie aux polymères, qui va la saturer et assurer ainsi l'accrochage de la membrane au support et à la nouvelle couche de recouvrement. Ce complexe retardateur de fissuration est une interface étanche.

**Géogrille :** c'est une grille constituée de fibres de polypropylène, de polyester ou de verre. Les jonctions entre les brins peuvent être rigides ou non. La grille est fixée au support à l'aide d'une couche d'émulsion. Ce système fait partie de la catégorie des interfaces rigides.

Ce type de renforcement peut être combiné avec une membrane non tissée afin d'allier les propriétés de renfort aux avantages de l'étanchéisation de la couche. Nous proposons deux exemples de ce type de produit, pour lesquels les jonctions des brins sont rigides.

- la grille Tensar AR-G commercialisée par Tensar : c'est une grille en polypropylène liée de manière thermique à un géotextile non tissé (Fig. 4.15).
- la grille Rotaflex 816 SL commercialisée par 6D Solutions : c'est un non-tissé armé d'une grille en fibres de verre fermée (Fig. 4.16).

Ces géogrilles sont utilisées depuis une vingtaine d'années en tant que renforcement de chaussées. Elles se présentent comme assez efficaces pour retarder la remontée de fissure. Mais leur inconvénient majeur réside dans leur mise en place et la difficulté d'éviter tout pli ou gondolement qui limiterait fortement leur efficacité.

**Grille d'armature métallique :** c'est une grille en acier, fixée au support par clouage ou à l'aide d'une couche fine à base de bitume. Ce type de complexe est une interface rigide.

Dans cette catégorie, nous pouvons citer le treillis soudé ([REFLEX, 2002]). L'utilisation de ce matériau, largement utilisé dans le secteur du bâtiment, en tant que système retardateur de fissuration a fait l'objet du projet européen "REinforcement of FLEXible road structures with steel fabrics to prolong service life" (REFLEX).

Les essais de laboratoire ont montré une bonne efficacité de ce système. En moyenne, la durée de vie des éprouvettes renforcées était augmentée de 35%. Quelques chantiers expérimentaux ont



FIGURE 4.15. *Mise en place de la grille Tensar [TENSAR, 2002]*

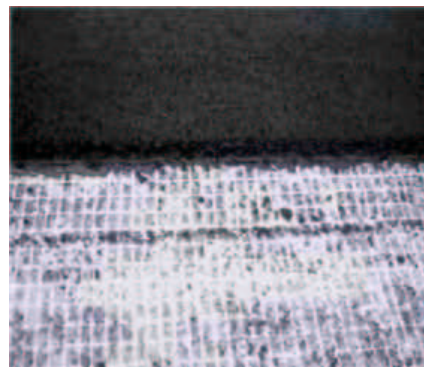


FIGURE 4.16. *Rotaflex : Grille en fibres de verre et membrane non tissée [6DSolutions, 2001]*



FIGURE 4.17. *Mise en place de treillis soudés [REFLEX, 2002]*

également pu être réalisés (Fig. 4.17) et là encore le système semble être performant. Mais le recul que l'on peut avoir sur cette technique relativement nouvelle est assez faible.

Toutefois, le produit le plus courant de cette gamme d'interface est la grille Mesh Track (Fig. 4.18), commercialisée depuis 1982 par Bekaert. C'est une grille constituée de fils d'acier galvanisés, torsadés et renforcés transversalement, à intervalles réguliers, par des plats torsadés en acier, pour améliorer l'ancrage.

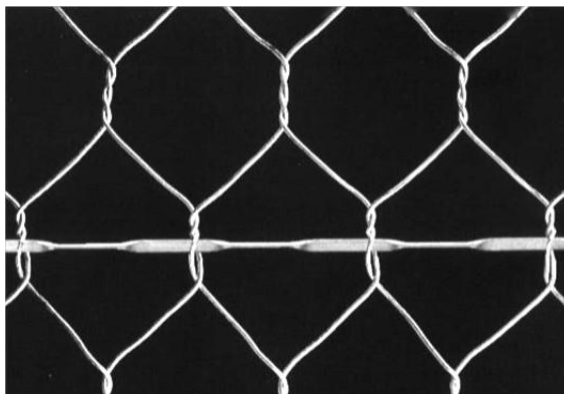


FIGURE 4.18. *MeshTrack* : grille en acier tréfilé [BEKAERT, 2002]

Sa mise en place se déroule en quatre phases ([Al-Qadi et Elseifi, 2004]) :

1. Préparation de la surface : traitement des joints, préfissuration si nécessaire et mise en place d'une couche d'accrochage en émulsion.
2. Installation de la grille : les rouleaux sont déroulés à l'envers et un rouleau à pneus peut être nécessaire pour aplanir la grille. Elle est ensuite clouée pour la maintenir en place. Sa mise en prétension peut permettre d'éviter la formation de gondolement et de réduire le nombre d'agrafes.
3. Mise en place de l'enrobé coulé à froid (ECF) : cette interface supplémentaire est optionnelle mais présente de grands avantages : diminution du nombre de fixations, étanchéisation des couches inférieures, amélioration de la liaison avec la chaussée existante, mise en place plus aisée de la couche de roulement et absorption des grandes déformations.
4. Mise en place de la couche bitumineuse supérieure.

De nombreux chantiers expérimentaux ont été réalisés en Europe et aux Etats-Unis. Ils ont permis de prouver l'efficacité de ce système retardateur de fissuration ([Al-Qadi et Elseifi, 2004], [Vanelstraete et De Visscher, 2004] par exemple). On peut citer par exemple les planches d'essais réalisés sur la RN7 en France ([Ballié, 2004]) par l'entreprise Colas. Le complexe réalisé a été placé sur une assise composée de deux couches de 25cm de graves ciment très fissurées et est constitué d'une couche accrochage, de la grille MeshTrack (type MT2), d'un ECF et de 5cm de béton bitumineux semi-grenu modifié par un liant élastomère. Les résultats en termes de pourcentage de remontée de fissures sont présentés dans le tableau Tab. 4.2. Ils montrent l'efficacité du complexe par rapport à un témoin utilisé classiquement.

Toutefois, les entreprises reprochent souvent sa mise en oeuvre difficile, notamment au niveau des découpes dans les virages. De plus les maîtres d'ouvrages restent sceptiques sur son futur recyclage et déplorent son prix élevé.

**Nids d'abeille** : C'est un ensemble d'éléments hexagonaux rempli de béton bitumineux et cloué sur la chaussée existante. Cette interface est classée parmi les complexes rigides.

Section	Voie	1 an	2 ans	3 ans	4 ans
Témoin	lente	1%	28%	56%	83%
	rapide	0%	22%	41%	51%
Avec le complexe	lente	0%	0%	3%	6%
	rapide	0%	0%	0%	0%

TABLEAU 4.2. *Pourcentage de remontée de fissures transversales (RN7) ([Ballié, 2004]) (complexe = MesTrack noyé dans un ECF)*

Citons le produit Metalflex (Fig. 4.19) commercialisé par SCREG depuis 1989. Ce nid d’abeille est en acier et ses cellules sont fixées entre elles grâce à des ronds acier transversaux, cloués sur la chaussée existante.



FIGURE 4.19. *Mise en oeuvre du Metalflex (www.screg.fr)*

La structure alvéolaire de ce matériau permet de bloquer les déplacements latéraux du matériau et sa rigidité s’oppose aux battements verticaux des fissures. Cette technique a prouvé son efficacité sur quelques chantiers en France. Il est particulièrement utile dans les zones fortement sollicitées comme les voies poids lourds, les gares de péage, les carrefours giratoires, ... Toutefois son coût très élevé limite fortement l’expansion de son utilisation.

*Remarque* : la mise en place d’une interface en matériau granulaire est également un moyen de ralentir la remontée de la fissuration ([Titi et al., 2003]). En effet, la concentration de contraintes en pointe de fissure est dans ce cas absorbée par le mouvement relatif des granulats. Toutefois, cette configuration correspond à la structure d’une chaussée de type “structure inverse”. Aussi, dans la suite, nous ne détaillons pas cette solution.

La fissuration réfléctive peut également être retardée en agissant sur la couche bitumineuse supérieure. Plus précisément, c’est son épaisseur ou sa composition qui jouent un rôle.

D’une part, lorsque la couche bitumineuse supérieure est plus épaisse, les assises traitées sont davantage protégées des variations de température et les mouvements des fissures de retrait thermique sont ainsi réduits. Ce facteur agit donc sur la phase d’initiation de la fissure dans la couche bitumineuse. Quant à la phase de propagation, elle est également allongée puisque si la couche est plus épaisse, le temps de parcours jusqu’à la surface est plus long. On retrouve ici les avantages des chaussées mixtes caractérisées par un rapport de l’épaisseur de la couche bitumineuse sur l’épaisseur totale de la chaussée de l’ordre de 0.5. Par contre, l’inconvénient de cette configuration est une fissuration par le haut de la couche, qui peut être expliquée par les différentes

raisons exposées au paragraphe 4.2.3.1 : la fatigue et le vieillissement des matériaux bitumineux, les variations thermiques, les contraintes de cisaillement induites par le passage des véhicules.

D'autre part, la résistance à la fissuration de la couche bitumineuse peut être améliorée en modifiant sa formulation. La base de son optimisation est le compromis entre une plus grande déformabilité et une bonne résistance à l'orniérage. L'utilisation de bitume modifié par ajout de styrène-butadiène-styrènes (SBS) ou de éthylène-vinyl-acétates (EVA) permet d'obtenir un matériau plus visqueux et moins thermo-sensible. Une autre méthode est d'augmenter la raideur du mélange en noyant des fibres. Elles doivent être fines et courtes et sont soit minérales (fibres de verre, de roche, ...), soit organiques (fibres de cellulose par exemple) et même exceptionnellement en acier.

#### 4.4.3.3 Rôle d'une interface rigide

Nous proposons dans ce paragraphe une illustration du fonctionnement d'une couche renforcée soumise à une fissuration.

[Montestruque et al., 2004] ont étudié l'effet de la présence d'une géogridde en polyester sur la remontée de fissuration. Des essais de fatigue en flexion de poutres, renforcées ou non, reposant sur un support élastique ont été simulés numériquement.

Sur la figure Fig. 4.20, nous observons que la présence de la géogridde permet de diminuer les efforts de traction en pointe de fissure. Il apparaît aussi que les contraintes dans la grille augmentent lorsque la fissure se propage.

Cependant, cet essai de flexion ne permet pas de simuler l'état de compression de la couche renforcée dont il a été question au paragraphe 4.3.3 et ne prend pas en compte les caractéristiques viscoélastiques des matériaux. Les essais de laboratoire ont pour but de rester proches de la réalité sur chaussée mais des hypothèses simplificatrices sont toujours nécessaires. Le chapitre suivant traitera précisément des différents tests existants pour caractériser l'efficacité des solutions permettant de retarder la fissuration réfléctive.

## Conclusion

Les types de dégradations des chaussées sont multiples et ont des conséquences d'importance différente selon que l'on se place du point de vue du patrimoine ou du point de vue de l'utilisateur. La méthode d'évaluation de la qualité des chaussées tient compte de ce commentaire.

Parmi les différents types de fissuration observés, la fissuration réfléctive est caractéristique des chaussées semi-rigides. D'après les travaux relevés, l'initiation de la fissuration serait dans ce cas essentiellement due aux chargements thermiques et sa propagation serait accélérée par le passage d'une charge roulante. Toutefois, nous n'avons pas relevé de travaux étudiant la contribution des différents chargements sur la propagation de fissure dans la chaussée en termes de viscoélasticité.

Différents moyens sont disponibles pour ralentir la remontée de fissuration transverse des assises traitées aux liants hydrauliques. D'après les chantiers expérimentaux réalisés, les plus efficaces sont les techniques de préfissuration et les complexes retardateurs de fissuration.

Toutefois, dans le cas de la commercialisation d'un nouveau produit, une étape intermédiaire avant la mise en oeuvre sur chantier est la caractérisation en laboratoire. Le chapitre suivant a pour objectif de classer et détailler les principaux moyens expérimentaux développés pour évaluer les solutions permettant de retarder l'apparition de fissures en surface, et plus particulièrement les techniques mettant en oeuvre un système avec interface.

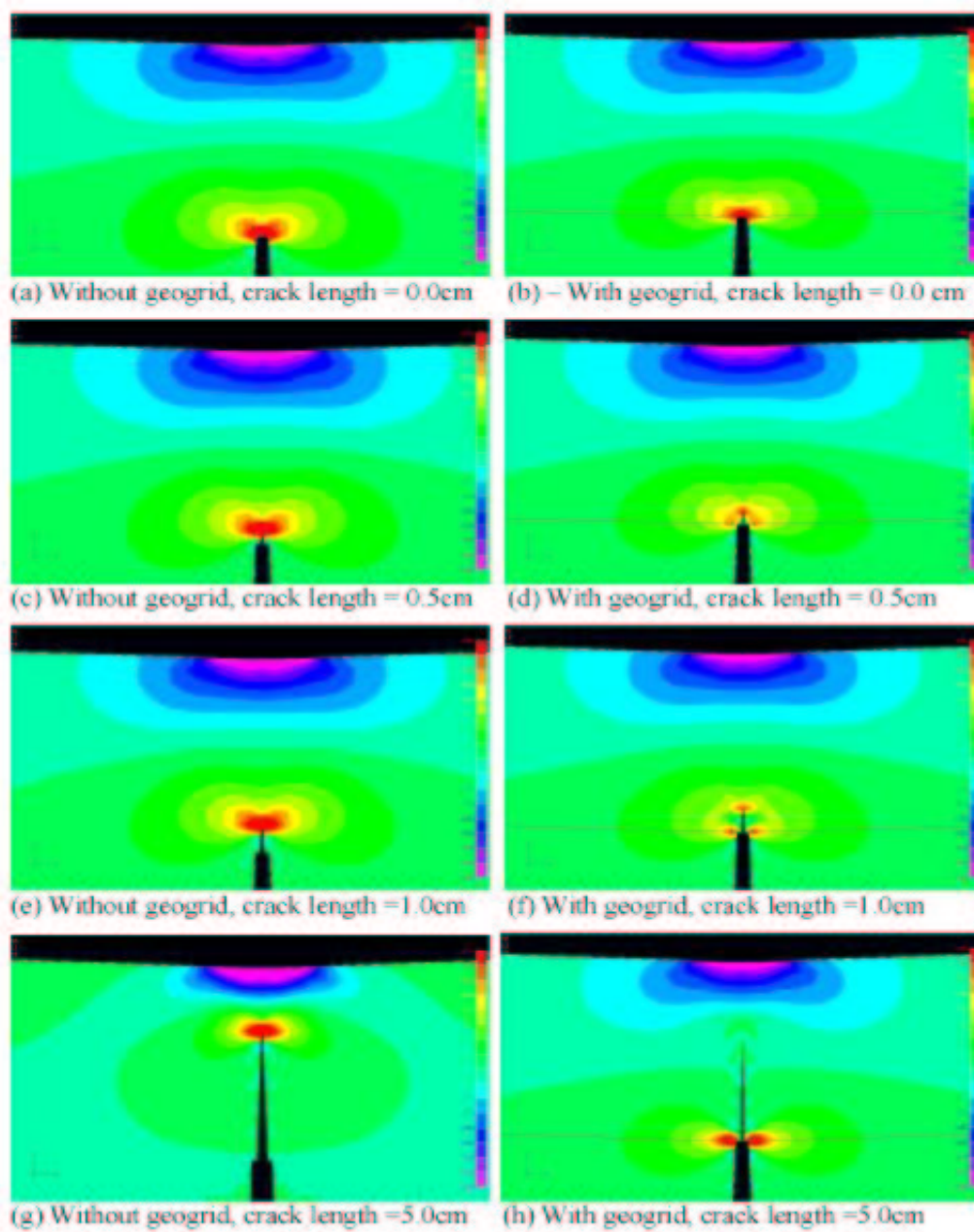


FIGURE 4.20. Répartition de la contrainte de traction dans la poutre au fur et à mesure de l'avancée de la fissuration ([Montestruque et al., 2004])

## Chapitre 5

# Les essais de caractérisation des systèmes retardateurs de fissuration

### Introduction

Les essais caractérisant les systèmes retardateurs de fissuration visent des buts divers. Ils peuvent permettre de comprendre le fonctionnement mécanique d'un phénomène, de déterminer le rôle d'une solution, de l'optimiser, de valider son efficacité, de la comparer à d'autres techniques,... Selon la nature de cet objectif, la taille du bâti d'essai et la durée de l'expérimentation doivent respecter certaines limites.

La première partie de ce chapitre a pour but de classer les essais qui existent pour évaluer les caractéristiques d'une solution retardatrice de fissuration en fonction de la composition des éprouvettes et de la taille de l'essai. Ainsi, les essais appelés "essais matériaux" représentent les essais de petites dimensions sur des échantillons mono-matériau. Les dimensions des "essais multicouches" restent également à l'échelle d'un essai de laboratoire mais les éprouvettes sont plus complexes et composées en général de plusieurs matériaux. Enfin les "essais structure" correspondent à la dernière étape avant l'expérimentation sur chantier de par leur taille et la fabrication des éprouvettes.

Les deux parties suivantes présentent les résultats de la campagne d'essais de retrait-flexion, qui est un exemple d'"essais multicouches" et les résultats des essais FABAC, qui correspond à un bâti d'"essai structure".

### 5.1 Classification des essais

#### 5.1.1 Les "essais matériaux"

Les essais qui sont décrits dans cette partie sont les essais courants d'évaluation des propriétés mécaniques des matériaux. Les essais sur éprouvette entaillée ne sont pas mentionnés ici mais ils seront traités dans la partie "essais multicouches".

##### 5.1.1.1 La caractérisation des matériaux bitumineux

Les matériaux traités dans cette partie sont les enrobés de la couche de roulement et les complexes retardateurs à base de bitume tels que le sable enrobé et les membranes bitumineuses de type SAMI.



Comme nous l'avons déjà vu dans la partie 3.1.2, les caractéristiques des matériaux bitumineux dépendent de la température et de la fréquence de sollicitation. Les essais permettant de déterminer les propriétés de raideur, de résistance à la fatigue et de résistance à l'orniérage doivent donc se faire pour différents couples température-fréquence afin de caractériser complètement le comportement de ces matériaux.

Le module de rigidité et la résistance à la fatigue sont mesurés généralement grâce à des essais de flexion simple. Les géométries des éprouvettes ainsi que les points de chargements peuvent présenter des différences, mais dans tous les cas, une charge  $\sigma_t$  ou une déformation  $\varepsilon_t$  est appliquée de façon répétitive. Quelques cycles suffisent pour la mesure du module. Par contre dans le cas de la détermination de la résistance en fatigue, le chargement est appliqué jusqu'à la ruine de l'éprouvette, qui peut alors être définie par un nombre de cycles appliqués  $N_f$ .

Les différents systèmes de mise en flexion sont les suivants ([Mathews et Monismith, 1993]) :

- *la flexion trois ou quatre points* : une éprouvette prismatique est placée sur deux appuis et la charge ou le déplacement est appliqué en un (Fig. 5.1(a)) ou deux (Fig. 5.1(b)) points. La flexion quatre points a l'avantage sur la flexion trois points d'assurer un moment de flexion constant en milieu de travée, entre les deux points d'application de la charge.
- *la flexion par rotation* : cet essai consiste en un support tournant sur lequel est installée l'éprouvette cylindrique à tester. La charge est appliquée perpendiculairement à l'autre extrémité (Fig. 5.1(d)).
- *la flexion sur éprouvette trapézoïdale* : l'éprouvette est encastrée au niveau de la grande base et un chargement ou un déplacement sinusoïdal est appliqué au niveau de sa petite base (Fig. 5.1(c)). C'est l'essai normalisé français dont il a été question en 3.1.2.

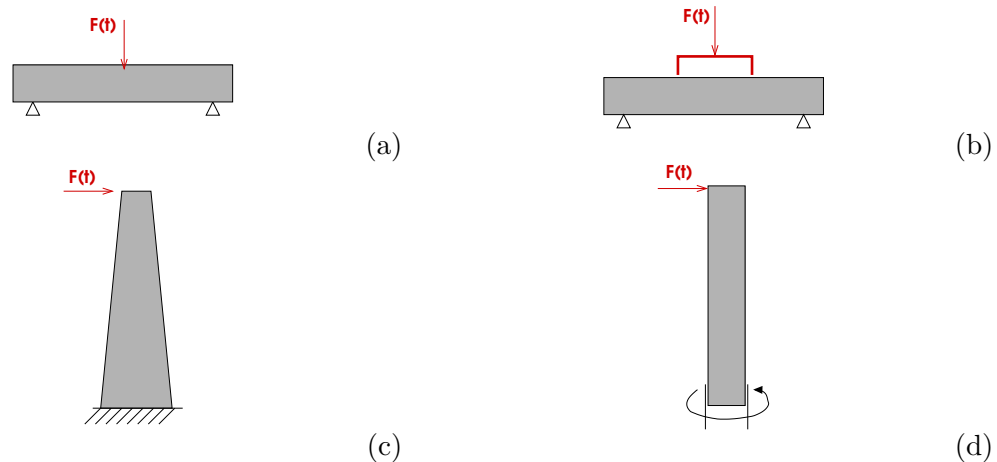


FIGURE 5.1. Schémas de principe de (a) flexion 3 points, (b) flexion 4 points, (c) flexion 2 points, (d) flexion par rotation

La caractérisation des matériaux bitumineux peut également être faite grâce à des essais uniaxiaux, c'est-à-dire des essais classiques de traction ou/et compression pour lesquels la sollicitation (charge ou déplacement) est appliquée de façon cyclique. Les inversions de charge ayant une influence sur le comportement à la fatigue des matériaux bitumineux, les essais sont parfois réalisés avec des cycles de charge combinant la traction et la compression.

Par ailleurs l'essai de traction indirecte ou de fendage mis au point pour le béton peut également être adapté aux matériaux bitumineux. Appelé également "essai brésilien", cet essai consiste à solliciter, de façon cyclique, un cylindre, entre les deux plateaux d'une presse de compression, suivant deux génératrices opposées (Fig. 5.2). Cependant cet essai ne permet pas de réaliser d'inversement de contraintes. De plus l'état de contraintes est biaxial; les résultats ne peuvent



donc pas être directement comparés à des résultats d'essais uniaxiaux classiques. Comme l'a montré [Mathews et Monismith, 1993], il est alors nécessaire d'analyser les données en termes de contraintes déviatoriques.

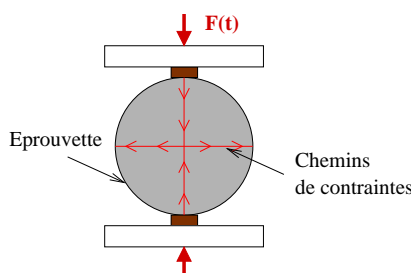


FIGURE 5.2. *Essai de traction indirecte*

Enfin, même s'ils sont plus rarement utilisés dans ce contexte les essais triaxiaux permettent eux aussi de caractériser les matériaux bitumineux. Le mode de chargement est tel que des sollicitations axiales (traction/compression) et radiales (confinement) sont appliquées de façon indépendante.

#### 5.1.1.2 La caractérisation du produit d'interface

En dehors des caractéristiques géométriques telles que l'épaisseur et la taille des mailles pour les grilles, les produits d'interface doivent être évalués d'un point de vue mécanique. Les essais expérimentaux doivent permettre de définir les grandeurs telles que le module de rigidité, la contrainte et la déformation à l'état ultime.

Toutes ces valeurs peuvent être obtenues à partir de simples tests de traction. Mais il est important de noter que de nombreux produits d'interface sont anisotropes (géogrilles par exemple). Il est donc nécessaire de les tester longitudinalement et transversalement.

De plus, selon le matériau de base et le type de produit, différentes conditions d'essai sont envisageables. Dans le cas d'une grille dont les jonctions entre brins ne sont pas rigides, la traction peut être faite sur un seul brin. Mais si l'on veut caractériser une grille dont les jonctions sont rigides, le test doit être fait sur la grille elle-même et sur un échantillon contenant suffisamment de mailles.

D'autres informations sur les produits d'interface peuvent être nécessaires, comme la sensibilité à la température, la quantité de bitume absorbable par exemple. Les essais permettant d'obtenir ces données plus spécifiques à certains produits, ne sont pas présentés ici, mais le tableau Tab. 5.1 fournit quelques valeurs indicatives pour les membranes non tissées et les géogrilles ([Vanelstraete et al., 1997]).

#### 5.1.2 Les “essais multicouches”

Nous appelons “essais multi-couches” les essais effectués sur des éprouvettes qui sont composées de plusieurs matériaux différents et dont les dimensions restent à l'échelle des essais nommés “essais matériaux”. Nous proposons de distinguer deux types d'essais ([Vanelstraete et al., 1997]) : les essais permettant de caractériser les liaisons entre les matériaux et ceux ayant pour objectif d'évaluer de façon qualitative les performances d'un complexe retardateur de fissuration.

	Nonwoven		Grid		
Base material	polyester	polypropylene	polyester	polypropylene	fibre glass
Base material	polyester	polypropylene	polyester	polypropylene	fibre glass
Type	-	-	fillet or woven	grid	fillet or woven
Mesh size ( $mm$ )					
Longitudinal direction	-	-	20 - 40	$\sim 50$	10 - 40
Transverse direction	-	-	20 - 40	$\sim 75$	10 - 40
Mass per unit area ( $g/m^2$ )	130 - 160	130 - 160	200 - 500	200 - 300	200 - 650
Thickness ( $mm$ )	0.7 - 1.6	0.7 - 1.6	0.7 - 1.2	0.7 - 1.1	0.7 - 1.2
Ultimate strength ( $kN/m$ )					
Longitudinal direction	5 - 10	5 - 10	50 - 90	14 - 25	35 - 100
Transverse direction	5 - 10	5 - 10	50 - 90	18 - 25	50 - 200
Strain at ultimate strength (%)					
Longitudinal direction	35 - 100	50 - 90	10 - 15	10 - 15	3 - 4
Transverse direction	35 - 100	50 - 90	10 - 15	8 - 10	3 - 4
Product stiffness at 2% strain ( $kN/m$ )	10 - 20	10 - 20	200 - 400	400 - 800	1500 - 8000
Vicat softening point ( $^{\circ}C$ )	230 - 240	148	230 - 240	148	$\geq 300$
Quantity of absorbable binder ( $kg/m^2$ )	0.7 - 1.4	0.7 - 1.4	-	-	-

TABLEAU 5.1. Valeurs indicatives des caractéristiques des grilles et des non tissés disponibles dans le commerce [Vanelstraete et al., 1997]

#### 5.1.2.1 La mesure de l'adhérence entre les couches

Les trois principaux types de tests permettant de mesurer l'adhérence entre deux couches sont les essais de traction, les essais de "pull-out" et les essais de cisaillement.

En ce qui concerne les essais de traction, c'est l'adhérence du système dans le cas de sollicitations perpendiculaires au plan de l'interface. Pour cette raison, ce n'est pas l'essai le plus pertinent dans le cadre de l'étude de la liaison d'un complexe retardateur de fissuration.

Les essais d'arrachement communément appelés "essais de pull-out" permettent d'évaluer le comportement à l'arrachement des systèmes d'interfaces (Fig. 5.3). Il est caractérisé par la relation entre la force  $F$  appliquée et le glissement de l'interface mesuré.

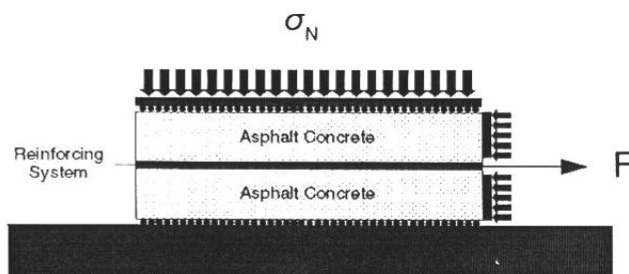


FIGURE 5.3. Schéma d'un test d'arrachement [Vanelstraete et al., 1997]

Différents dispositifs d'essai de cisaillement direct ont été mis au point. Nous pouvons citer les travaux de [Leutner, 1979] (Fig. 5.4(a)) et de [Grzybowska et al., 1993] (Fig. 5.4(b)).

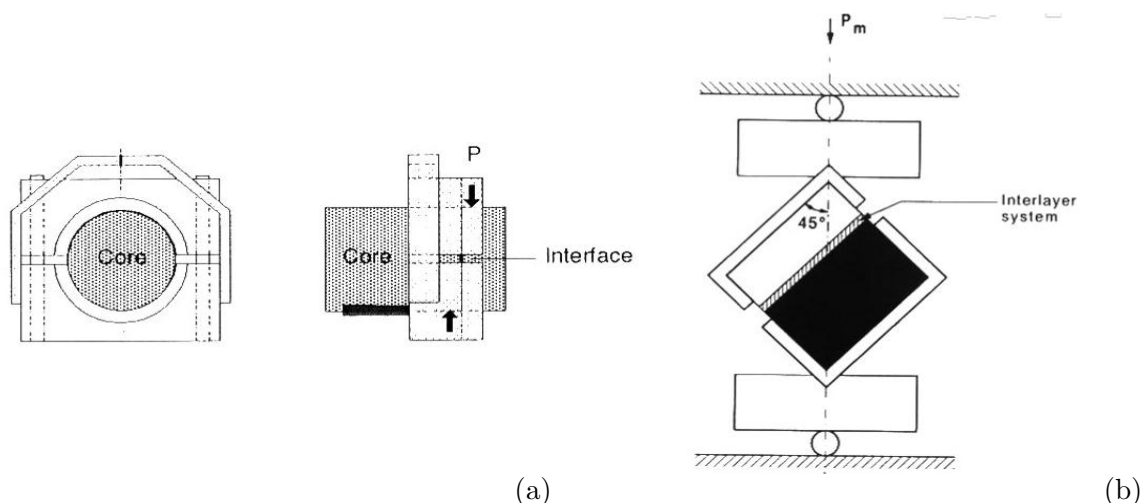


FIGURE 5.4. (a) Test de cisaillement direct de [Leutner, 1979], (b) Test de cisaillement direct de [Grzybowska et al., 1993]

Ces essais ont l'avantage de la simplicité de leur mise en oeuvre. Mais d'un point de vue mécanique, ils ne permettent pas de créer un champ de contraintes de cisaillement pur. En effet, le plan de cisaillement est dans les deux cas soumis à un moment induit pas le mode de sollicitation. L'essai développé à l'université de Delft ([de Bondt et Scarpas, 1994]) est un exemple d'essai de cisaillement 4 points (Fig. 5.5) permettant de réaliser un état de contraintes tel que le cisaillement soit uniforme, sans moment supplémentaire dans le plan étudié. Cependant la complexité de ce dispositif limite son utilisation aux travaux de recherche.

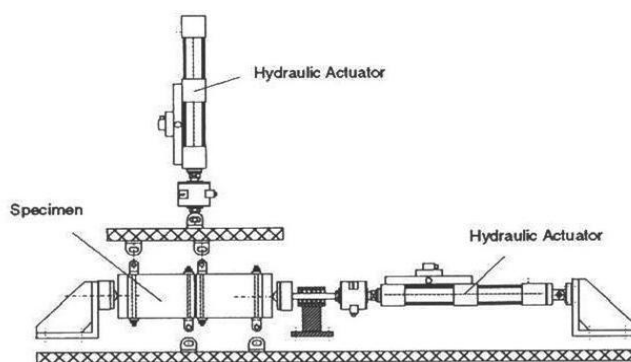


FIGURE 5.5. Test de cisaillement 4 points [de Bondt et Scarpas, 1994]

### 5.1.2.2 La mesure de l'efficacité du système

Nous avons déjà vu que les deux principales sollicitations contrôlant la fissuration réfléctive sont le trafic et les variations thermiques. [Vanelstraete et al., 1997] propose de classer les essais mesurant l'efficacité des systèmes retardateurs de fissuration en trois catégories :

- les essais simulant uniquement la charge de trafic
- les essais simulant uniquement les variations thermiques
- les essais simulant la charge de trafic et les variations thermiques

Le point commun de tous ces dispositifs est de provoquer une fissuration et d'étudier son avancée. La mesure de la propagation de la fissure peut être faite visuellement ou grâce à une

instrumentation de type jauge de fissuration. L'exploitation des résultats est généralement orientée vers une approche de type mécanique à la rupture.

### Essais simulant uniquement la charge de trafic

Différents dispositifs de ce type existent. Ils se présentent généralement sous la forme d'un essai de flexion trois points amélioré (Fig. 5.6(a)) en faisant reposer l'éprouvette sur une couche d'élastomère ([Brown et Brunton, 1989], [Fock, 1989], [Sobhan et al., 2004]) ou sur des appuis glissants afin de simuler la présence d'un sol.

Selon la position de la charge, ils peuvent simuler soit une fissuration de type mode I (flexion), soit une fissuration de type mode II (cisaillement).

Dans certains cas, la charge est appliquée par l'intermédiaire d'un disque afin d'obtenir une répartition de la charge plus proche de la réalité, que lorsqu'une force ponctuelle est utilisée.

Certains essais sont orientés vers l'étude de l'influence du battement des dalles en béton sur la vitesse de fissuration ([Vanelstraete et Francken, 1996]).

Enfin, dans d'autres cas, c'est une charge roulante qui est utilisée ([Brown et Brunton, 1989], [Yamaoka et al., 1989]) (Fig. 5.6(b)). Les passages en avant et en arrière d'une roue munie d'un pneu permettent de simuler le déploiement effectif de la charge (essai nommé "Wheel-Track").

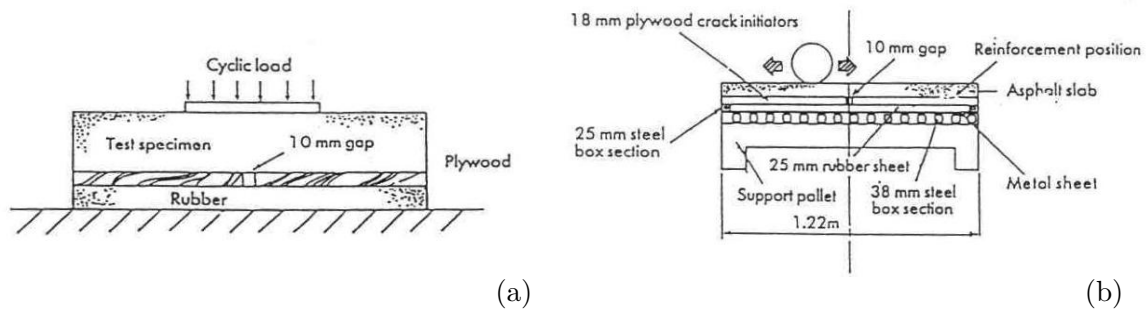


FIGURE 5.6. Essai de flexion amélioré (a) reposant sur une couche d'élastomère, (b) avec charge roulante [Brown et Brunton, 1989]

Notons que les dispositifs présentés ici utilisent des éprouvettes dont la longueur est comprise entre 30 et 60cm, sauf dans le cas de l'essai de roulement de [Brown et Brunton, 1989], pour lequel la longueur de l'éprouvette est de 1.22m. Le point faible commun à tous ces essais est la simulation des conditions limites aux bords des éprouvettes. En effet les forces de réaction du reste de la structure de chaussée doivent être introduites et il est difficile de le faire précisément.

### Essais simulant uniquement les variations thermiques

C'est principalement le retrait thermique des couches d'assises qui est simulé dans ce type d'essai ([Clauwaert et Francken, 1989], [Di Benedetto et al., 1993], [Zhou et al., 2004]). Le dispositif est alors réalisé de façon à pouvoir déplacer une partie de la couche en béton et de simuler ainsi l'ouverture et la fermeture de la fissure.

Des tests menés sur le dispositif présenté sur la Fig. 5.7 ([Clauwaert et Francken, 1989]) ont permis de comparer différentes interfaces retardatrices de fissuration (Fig. 5.8). Il apparaît que les grilles et particulièrement les grilles en acier sont très efficaces.

### Essais simulant la charge de trafic et les variations thermiques

Ce type d'essai combinent les sollicitations présentées dans les deux paragraphes précédents. On peut citer par exemple l'essai de retrait-flexion du Laboratoire Régional des Ponts et Chaussées (LRPC) d'Autun ([Vecoven, 1989], [Dumas et Vecoven, 1993]). Il consiste à suivre la remontée d'une fissure sur l'épaisseur d'une éprouvette, constituée du système à tester et d'une couche

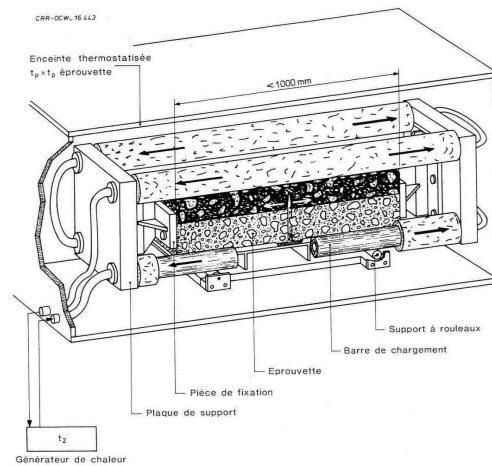


FIGURE 5.7. Schéma de principe de l'appareillage utilisé pour simuler la fissuration thermique [Clauwaert et Francken, 1989]

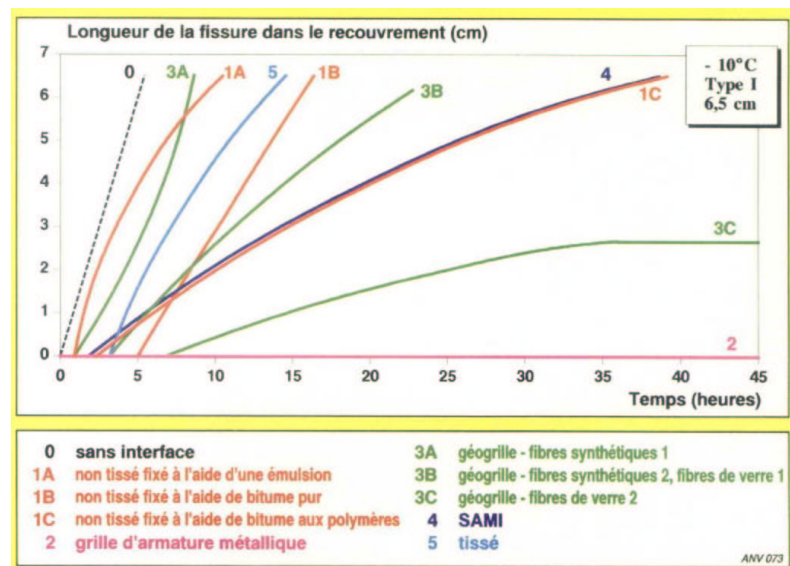


FIGURE 5.8. Résultats d'essais de fissuration thermique réalisés sur différents types d'interfaces [Vanelstraete et al., 1997]

bitumineuse. Chaque éprouvette (560 x 110 x 80 mm) représentative du complexe est soumise, dans des conditions de température constante (5°C) à deux sollicitations simultanées (Fig. 5.9) :

- une traction longitudinale continue lente, simulant le retrait thermique (0.01mm/mn)
- une flexion verticale cyclique, à la fréquence de 1Hz et avec une flèche de 0.2mm, simulant le trafic.

La progression de la fissure est suivie par le biais d'une jauge de fissuration, constituée d'un réseau de fils conducteurs qui se rompent lorsque la fissure les atteint.

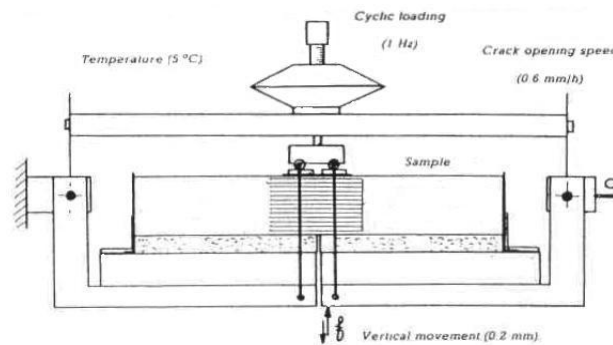


FIGURE 5.9. Schéma de principe de l'essai de retrait-flexion [Dumas et Vecoven, 1993]

La Fig. 5.10 présente les résultats d'une campagne d'essais sur ce dispositif pour tester l'efficacité de la grille en fibres de verre Rotaflex (voir paragraphe 4.4.3.2). Le complexe étudié est comparé à deux témoins (le premier est uniquement constitué de béton bitumineux "Témoin BB" et le second est composé d'une interface en sable enrobé et de béton bitumineux "Témoin bicouche") par l'intermédiaire du temps réduit  $r$  ( $r$  = temps de fissuration des couches testées / temps de fissuration du témoin bicouche). Finalement, cet essai montre que la grille devrait allonger la durée de vie de la structure de 47%.

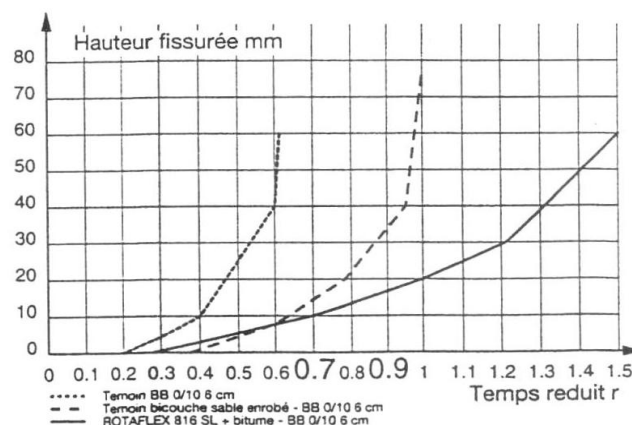


FIGURE 5.10. Résultats d'essais de retrait-flexion pour des éprouvettes renforcées avec la grille Rotaflex [6DSolutions, 2001]

### 5.1.3 Les "essais structure"

Les essais que nous nommons "essais structure" sont des essais permettant de simuler de façon plus réaliste le vieillissement d'une chaussée. Ce ne sont pas des essais spécifiques à l'étude de la

fissuration réfléctive. Ils représentent une alternative à l'expérimentation sur site plus onéreuse et plus risqu  e lorsque l'efficacité du système testé demande encore à être validée.

Etant donné l'important investissement qu'ils requièrent, les essais de ce type sont moins courants que les précédents.

Citons cinq exemples de dispositifs :

- Model Mobile Loading Simulator (MMLS3) développé à North Carolina State University ([Lee et Kim, 2004]) (Fig. 5.11),
- Accelerated Loading Facility (ALF) développé par le Federal Highway Administration (FHWA) ([Qi et al., 2004]) (Fig. 5.12),
- Pavement Test Facility (PTF) ([Antunes et al., 2004]) développé au Transport Research Laboratory (TRL),
- FABAC conçu au sein du LCPC dans le cadre du projet national "FABAC : Chaussées et pistes en béton - Dimensionnement des chaussées en Béton Armé Continu" (Fig. 5.13),
- le man  ge de fatigue du LCPC Nantes (Fig. 5.14)

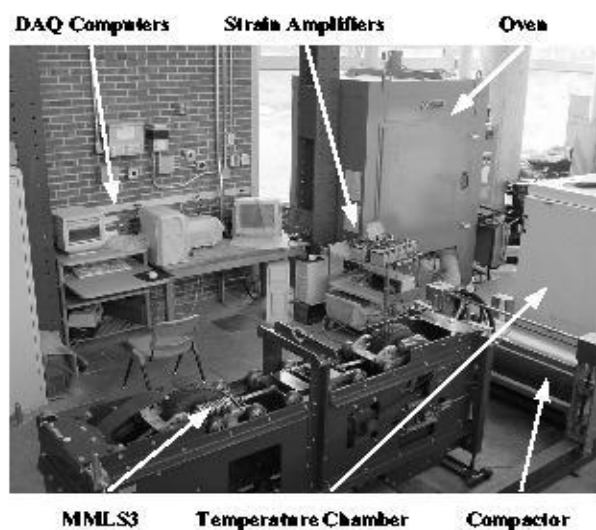


FIGURE 5.11. Dispositif d'essai MMLS3 [Lee et Kim, 2004]



FIGURE 5.12. Dispositif d'essai ALF [Qi et al., 2004]



FIGURE 5.13. *Dispositif d'essai FABAC*

Les quatre premiers sont des simulateurs unidirectionnels. Leur principe général est de faire rouler plusieurs demi-essieux, se déplaçant le long d'un rail, en boucle fermée, sur un multicouche représentatif de la structure de chaussée étudiée.

L'essai MMLS3 est un dispositif à l'échelle 1 :3 alors que les tests ALF, PTF et FABAC sont réalisés à l'échelle 1. Etant donnée sa plus petite taille, l'essai MMLS3 est contrôlé en température au moyen d'une enceinte, alors que les trois autres sont effectués à l'extérieur, la température pouvant néanmoins être relativement contrôlée grâce à des systèmes de chauffage radiant par exemple.

La longueur d'éprouvette testée est plus ou moins longue selon les dispositifs : 2m pour l'essai FABAC, 10m pour PTF, 14m pour ALF. La charge appliquée par chaque demi-essieu peut aller jusqu'à 100kN et leur vitesse d'avancée reste inférieure à 20km/h.

Par rapport aux essais présentés ci-dessus, le manège de fatigue du LCPC a l'avantage de tester une longueur plus importante de chaussée (110m) et sous des conditions de chargement plus contraignantes (virages). En effet, cette installation est formée d'une tourelle centrale et de quatre bras à l'extrémité desquels peuvent être fixées des charges roulantes (roues de poids lourds), de configurations variables (Fig. 5.14). Grâce à la grande longueur des bras, 20 m, la vitesse de déplacement des charges peut atteindre 100 km/h. Le site dispose de trois anneaux de longueur 110 mètres au rayon moyen de 19,5 m, et de largeur 6 mètres. Les chaussées testées sont réalisées avec du matériel courant de construction. Cet essai permet de reproduire en moins d'une semaine le trafic poids lourd subi par une chaussée à fort trafic pendant un an. Les observations et les mesures permettent de suivre sous trafic le comportement à la fatigue et à l'orniérage des matériaux.

FIGURE 5.14. *Manège de fatigue du LCPC ([www.lcpc.fr](http://www.lcpc.fr))*

La fissuration réfléctive et l'efficacité des solutions visant à la ralentir peuvent donc être ca-



ractérisées par différents essais : les “essais matériaux” qui permettent d’identifier les caractéristiques mécaniques de chaque intervenant, les “essais multicouches” qui concernent l’étude de l’interaction entre ces différents matériaux et les “essais structure” qui simulent les effets de structure pouvant apparaître dans une chaussée.

## 5.2 Campagne d’essais de retrait-flexion

Comme nous l’avons vu dans le paragraphe 5.1.2.2, l’essai de retrait-flexion est un essai de type “multicouche” simulant la charge de trafic et les mouvements de fissure liés aux variations thermiques. Nous avons réalisé une campagne expérimentale avec cet appareillage afin de comparer l’efficacité de différents systèmes retardateurs de fissuration et de connaître plus précisément les avantages et les inconvénients de cette méthode d’essai.

### 5.2.1 Principe de l’essai

Un essai de retrait-flexion (Fig. 5.9) consiste à faire subir à une éprouvette multicouche représentative du système testé, deux types de sollicitation :

- une traction longitudinale continue lente, simulant le retrait thermique ( $0.01\text{mm}/\text{mn}$ )
- une flexion verticale cyclique, à la fréquence de  $1\text{Hz}$  et avec une flèche de  $0.2\text{mm}$ , simulant le trafic.

Nous pouvons donc considérer que cet essai fait intervenir deux échelles de temps. La première est liée au trafic et donc à la fréquence imposée à la flexion cyclique. Une fréquence de  $1\text{Hz}$  correspond au passage d’un essieu de poids lourds par seconde. Comme aucun temps de repos entre chaque passage n’est pris en compte, le trafic journalier correspondant est très fort. L’essai correspond donc bien à un essai accéléré de fissuration. De plus, de part les caractéristiques viscoélastiques des matériaux bitumineux, nous pouvons considérer que les contraintes sont relaxées au bout de quelques cycles et donc que rapidement, la flexion imposée au départ sans inversion de charge tend vers un chargement dont la moyenne des contraintes est nulle.

La seconde échelle de temps est celle liée au retrait thermique et donc à la vitesse de traction longitudinale imposée. Considérons un chargement moyen sur  $10h$ , la vitesse imposée ( $0.01\text{mm}/\text{mn}$ ) est équivalente à une ouverture de fissure de  $6\text{mm}$ . Pour un coefficient de dilatation de  $2.10^{-5}C^{-1}$  et un espacement entre fissures de  $15\text{m}$ , cette ouverture correspond à une variation de  $20^{\circ}C$ , ce qui est cohérent avec une variation thermique moyenne jour/nuit sur  $10h$ . Notons que comme le déplacement de traction longitudinale imposé se fait à vitesse constante non nulle, les contraintes induites dans l’éprouvette ne peuvent pas être relaxées.

Pour conclure, cet essai correspond à la superposition d’un chargement à moyenne nulle, sans période de repos, dont l’échelle de temps est de l’ordre de la seconde, et un chargement à moyenne non nulle qui s’étend sur plusieurs heures.

### 5.2.2 Description des systèmes testés

Nous avons sélectionné quatre types de systèmes retardateurs de fissuration à tester lors de cette campagne :

- un sable enrobé : c’est une couche de  $20\text{mm}$  d’épaisseur constituée de sable riche en liant. Deux formulations  $F1$  et  $F2$  de ce matériau ont été testées, elles sont présentées dans les tableaux Tab. 5.2 et Tab. 5.3

Matériau	Origine	%
Sable 0/2	Pont de Colonne	80.0
Sable 0/3	Roulé de Loire	19.0
Fines	MEAC-Gy	1.0
Bitume 50/70	ELF	10.0

TABLEAU 5.2. *Formulation F1 du sable enrobé*

Matériau	Origine	%
Grave 4/6	La Noubleau	5.0
Grave 2/4	La Noubleau	38.0
Sable 0/2	La Noubleau	53.0
Fines	Airvault	4.0
Bitume 35/50	ELF	9.6

TABLEAU 5.3. *Formulation F2 du sable enrobé*FIGURE 5.15. *Grille en fibres de verre Rotaflex 830SL*

<u>Géométrie</u>	Longueur de la maille Largeur de la maille	40mm 30mm
<u>Masse</u>	Masse surfacique	0.38kg/m <sup>2</sup>
<u>Résistance</u>	Traction longitudinale Traction transversale	50kN/m 50kN/m

TABLEAU 5.4. *Caractéristiques de la grille Rotaflex 830SL*

- une grille en fibres de verre Rotaflex 830SL. Les caractéristiques géométriques et mécaniques de cette grille (Fig. 5.15) sont présentées dans Tab. 5.4

Cette grille en fibres de verre a des mailles de forme rectangulaire. Elle est positionnée dans les éprouvettes de façon à ce que le sens de la longueur du rectangle soit parallèle à la fissure et perpendiculaire à la direction de traction (Fig. 5.16).

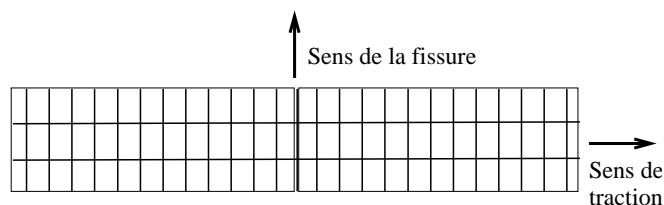


FIGURE 5.16. Définition du sens de mise en place des grilles en fibres de verre

- une grille en acier tréfilé Mesh Track MT2. Les caractéristiques géométriques et mécaniques de cette grille (Fig. 5.17) sont présentées dans Tab. 5.5

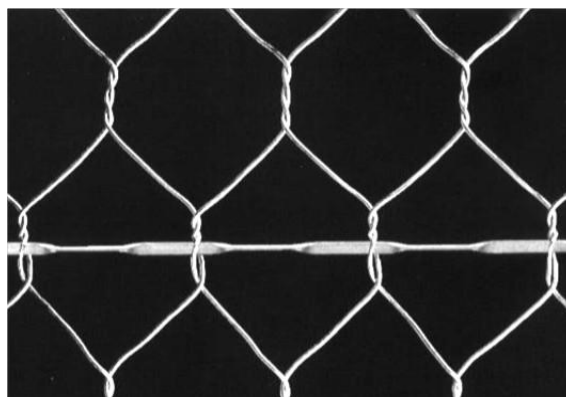


FIGURE 5.17. Grille en acier tréfilé Mesh Track MT2

<u>Géométrie</u>	Longue diagonale intérieure de la maille	118mm
	Courte diagonale de la maille	80mm
	Distance entre plats torsadés	245mm
	Diamètre des fils	2.2mm
	Section des plats torsadés	6.5 × 2.0mm
<u>Masse</u>	Masse surfacique	1.30kg/m <sup>2</sup>
<u>Résistance</u>	Traction longitudinale	32kN/m
	Traction transversale	32kN/m

TABLEAU 5.5. Caractéristiques de la grille Mesh Track MT2

- une nouvelle grille acier Cette grille n'est pas encore utilisée sur chantier, elle correspond à la nouvelle technique proposée par l'entreprise. Pour des raisons de confidentialité, nous ne proposons pas d'illustration photographique de ce matériau et dans la suite nous l'appellerons "solution ARCELOR" sans donner ses caractéristiques géométriques.

La procédure classique de mise en place de la grille Mesh Track utilisée comme système retardateur de fissuration est de la noyer dans une couche d'Enrobé Coulé à Froid (ECF) afin d'assurer sa planéité et d'améliorer la liaison entre les différentes couches. Afin de pouvoir comparer les trois types de grilles dans les mêmes conditions de mise en place, nous proposons de les noyer dans une telle couche d'une épaisseur de 10mm environ. La formulation utilisée (Tab. 5.6) est basée sur les prescriptions des fabricants de Mesh Track et adaptée en fonction des matériaux utilisés.

Matériau	Origine	%
Sable 0/4	Vigna	100.0
Ciment	CPJ45	1.0
Eau		10.5
Dope	Probinord	1.3
Emulsion de bitume polymère	Probinord	11.0

TABLEAU 5.6. *Formulation de l'enrobé coulé à froid*

Les deux grilles en acier ont des mailles de forme proche de celle d'un losange. Elles sont positionnées dans les éprouvettes telles que le sens de la longue diagonale de la maille est perpendiculaire à la fissure et parallèle à la direction de traction (Fig. 5.18).

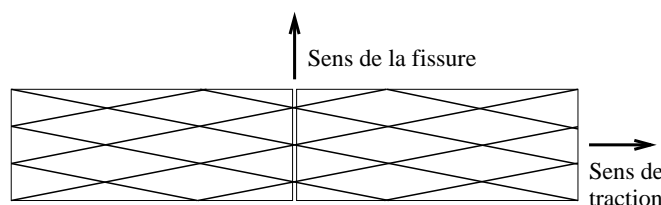


FIGURE 5.18. *Définition du sens de mise en place des grilles en acier*

Une amélioration de l'ancrage a été nécessaire pour les grilles en acier. En effet, la taille de l'éprouvette ne permet pas de mettre en place plus de deux mailles dans la largeur. Sans ancrage supplémentaire, la grille n'est pas mise à contribution et l'essai ne permet pas de conclure quant à l'efficacité de la grille (voir résultats de l'essai 514). Un inconvénient majeur de cette méthode d'essai est donc de ne pas être adaptée à tous les systèmes retardateurs de fissuration. Nous avons choisi d'améliorer l'ancrage des grilles en acier en soudant une tige en acier sur chacun des deux bords de la grille (Fig. 5.19). Notons toutefois que cette adaptation n'est pas parfaite puisqu'elle fait intervenir des éléments supplémentaires (deux tiges) qui vont participer aussi au renforcement du multicouche.

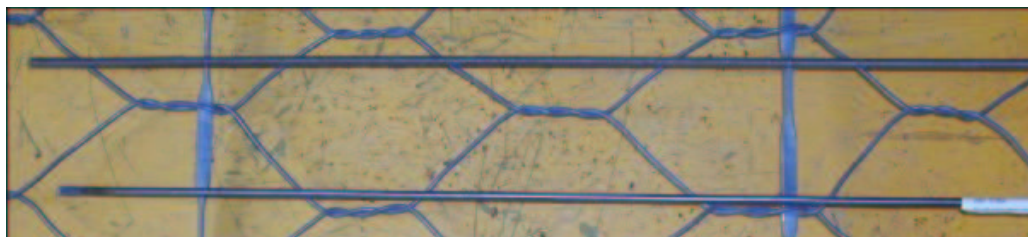


FIGURE 5.19. *Grille Mesh Track équipée d'une tige pour améliorer l'ancrage*

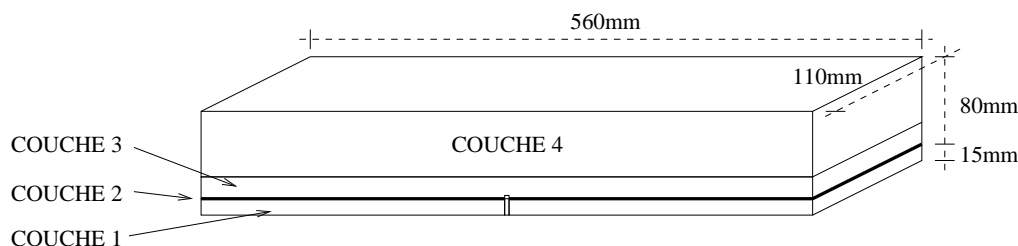


FIGURE 5.20. Schéma d'une éprouvette pour l'essai de retrait-flexion

### 5.2.3 Fabrication des éprouvettes

Les éprouvettes sont des poutres multicouches dont la longueur est  $560\text{mm}$ , la largeur  $110\text{mm}$  et l'épaisseur totale  $95\text{mm}$  (Fig. 5.20). Chacune d'entre elles est constituée de quatre couches :

- COUCHE 1 : un support préfissuré en Béton Bitumineux Coulé au Soufre (BBCS) d'une épaisseur de  $15\text{mm}$  (Tab. 5.7)

Matériau	Origine	%
Grave 4/6	Pont de Colonne	15.3
Grave 2/4	Pont de Colonne	23.0
Sable 0/3	Loire	33.2
Filler	MEAC	21.5
Soufre		7.0
Bitume 35/50	BP	8.0

TABLEAU 5.7. Formulation du béton bitumineux coulé au soufre

- COUCHE 2 : une couche d'accrochage de  $300\text{g}/\text{m}^2$  résiduel d'une émulsion de bitume à 65%.
- COUCHE 3 : le système retardateur de fissuration à tester (Tab. 5.10) dont la base est munie d'une encoche permettant de provoquer l'initiation de la fissuration verticale ; l'épaisseur de cette couche varie entre 0 et  $20\text{mm}$  selon le système testé.
- COUCHE 4 : une couche de roulement bitumineuse ; son épaisseur est variable selon le système testé (de 60 à  $80\text{mm}$ ), de façon à ce que l'épaisseur cumulée des couches 3 et 4 soit égale à  $80\text{mm}$ . Deux types de matériaux ont été testés : une Grave Bitume (GB0/14) dont la formulation est présentée dans le tableau Tab. 5.8 et un Béton Bitumineux (BB0/6) présenté dans le tableau Tab. 5.9.

Matériau	Origine	%
Grave 10/14	La Noubleau	40.0
Grave 4/6	La Noubleau	8.0
Grave 2/4	La Noubleau	15.0
Sable 0/2	La Noubleau	36.0
Fines	Airvault	1.0
Bitume 35/50	ELF	4.3

TABLEAU 5.8. Formulation de la grave bitume GB0/14

Matériau	Origine	%
Grave 4/6	La Noubleau	31.0
Grave 2/4	La Noubleau	6.0
Sable 0/2	La Noubleau	61.5
Fines	Airvault	1.5
Bitume 35/50	ELF	6.85

TABLEAU 5.9. Formulation du béton bitumineux BB0/6

Finalement, nous proposons de mettre en oeuvre le programme d'expériences décrit dans le tableau Tab. 5.10. Les éprouvettes sont des barreaux sciés dans une plaque. Aussi, suivant le système testé et sa géométrie, deux ou trois éprouvettes semblables peuvent être extraites de cette plaque, ce qui explique le nombre d'éprouvettes attribuées à chaque combinaison.

### 5.2.4 Résultats

Lors de l'essai, les éprouvettes sont instrumentées avec une jauge de fissuration sur chaque face Fig. 5.21.

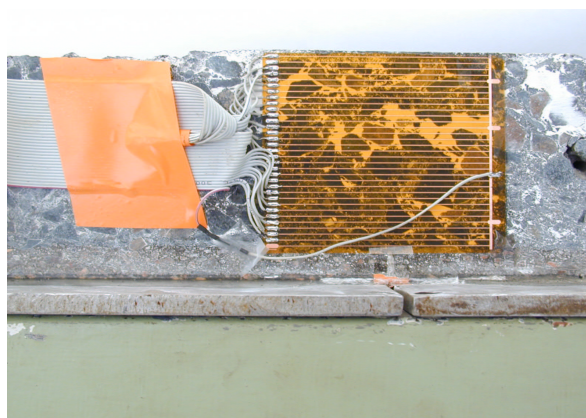


FIGURE 5.21. Jauge de fissuration collée sur une éprouvette et reliée à la centrale d'acquisition

Cet élément de mesure est composé d'un support et d'un réseau de fils conducteurs. Il est rendu solidaire de l'éprouvette par collage et est relié à une centrale d'acquisition. Au fur et à mesure de l'avancée de la fissure à travers l'éprouvette, les fils se rompent l'un après l'autre. La centrale d'acquisition permet de mesurer et d'enregistrer la résistivité de chaque fil. Ainsi à chaque instant  $t$ , il est possible de savoir si le fil n° $i$ , situé à la hauteur  $h_i$ , est cassé ou non. La mesure brute obtenue est donc un ensemble de couples de données  $(h, t)$  avec  $h$  la hauteur de fissuration.

Notons que cette instrumentation a l'avantage de mesurer l'avancée de la fissuration de façon non destructive mais que l'information obtenue correspond à la propagation de la fissure sur les faces extérieures de l'éprouvette et non pas au coeur de celle-ci. Nous faisons donc l'hypothèse que la discontinuité avance de façon uniforme sur toute la largeur de l'éprouvette, même si en réalité l'avancée sur les bords est affectée par un léger retard par rapport à la propagation au centre.

#### 5.2.4.1 Méthode d'exploitation

L'observation des données brutes montre que l'avancée de la fissuration en fonction du temps n'est pas mesurée de façon monotone (Fig. 5.22) : il est possible de mesurer à l'instant  $t_1$ , la rupture

Système retardateur de fissuration	Commentaires	Nombre d'éprouvettes	Nom de la plaque	Nom des éprouvettes
Témoin	GB0/14 sans système	3	506	506A, 506B, 506C
Sable enrobé <i>F1</i>	GB0/14	3	509	509A, 509B, 509C
Rotaflex + ECF	GB0/14	3	511	511A, 511B, 511C
Mesh Track + ECF	GB0/14 (sans ancrage)	2	514	514A, 514B
Solution ARCELOR + ECF	GB0/14 (avec ancrage)	2	516	516A, 516B
Mesh Track + ECF	GB0/14 (avec ancrage)	2	523	523A, 523B
Solution ARCELOR	GB0/14 (avec ancrage)	2	528	528A, 528B
Sable enrobé <i>F2</i>	BB0/6	3	530	530A, 530B, 530C
Sable enrobé <i>F2</i>	GB0/14	3	531	531A, 531B, 531C
Solution ARCELOR + ECF	BB0/6 (avec ancrage)	2	532	532A, 532B

TABEAU 5.10. *Description des systèmes retardateurs de fissuration et des configurations testées lors de la campagne d'essais de retrait-flexion*

d'un fil à une hauteur  $h_1$  et à  $t_2 = t_1 + \Delta t$ , la rupture du fil à la hauteur  $h_2$  avec  $h_2 < h_1$ . La principale raison expliquant ce phénomène est la forte hétérogénéité des matériaux : le chemin de fissuration n'est pas parfaitement rectiligne, sa trajectoire est adaptée en fonction des granulats rencontrés.

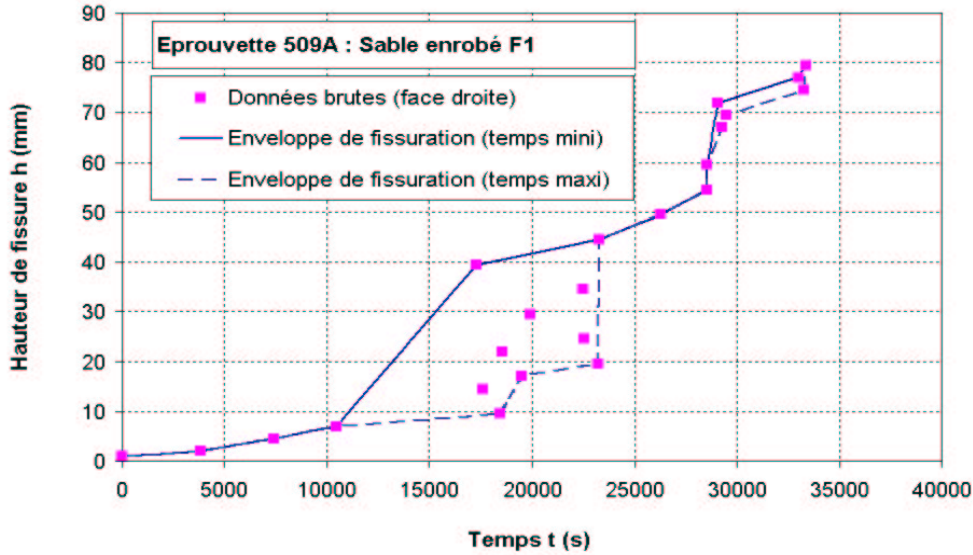


FIGURE 5.22. Mesures brutes issues d'une jauge de fissuration et courbes enveloppes correspondantes

Cette remarque nous mène à considérer les enveloppes des points de mesure. Sur le graphe Fig. 5.22, nous avons représenté, pour une des deux jauges de l'éprouvette nommée 509A, les données brutes avec des carrés roses et les deux enveloppes en trait bleu :

- l'enveloppe des temps maximaux en trait discontinu : cette courbe correspond à un traitement des données le plus favorable pour la mesure de l'efficacité des systèmes. En effet les mesures situées au-dessus de la courbe sont interprétées dans ce cas comme des relevés de microfissures sans lien avec la fissuration principale, ou comme des erreurs de mesure.
- l'enveloppe des temps minimaux en trait continu : dans cette configuration, on considère que si la présence de la fissure est mesurée à l'instant  $t$  et à la hauteur  $h$ , alors toute la hauteur comprise entre 0 et  $h$  est déjà fissurée même si tous les fils situés dans cet intervalle ne sont pas encore cassés.

Nous choisissons de traiter les données de la campagne d'essai en utilisant la seconde interprétation, c'est-à-dire l'enveloppe des temps minimaux. Il est en effet plus raisonnable de supposer que même si des fils inférieurs sont encore continus, les fils supérieurs rompus ont détecté la fissuration principale. Le retard potentiel de mesure sur les bords est ainsi pris en compte en partie.

Ce choix est également étendu à l'interprétation jointe des données issues des deux jauges de chaque éprouvette (Fig. 5.23). Nous considérons en effet la courbe enveloppe des temps minimaux pour les données issues des deux jauges. Ainsi en cas de problème de mesure sur l'une des jauges, la courbe de résultat reste toujours en accord avec les mesures réalisées sur l'autre jauge. De plus, si le retard est plus conséquent sur un bord que sur l'autre, c'est la mesure avec un retard minimal qui est prise en compte.



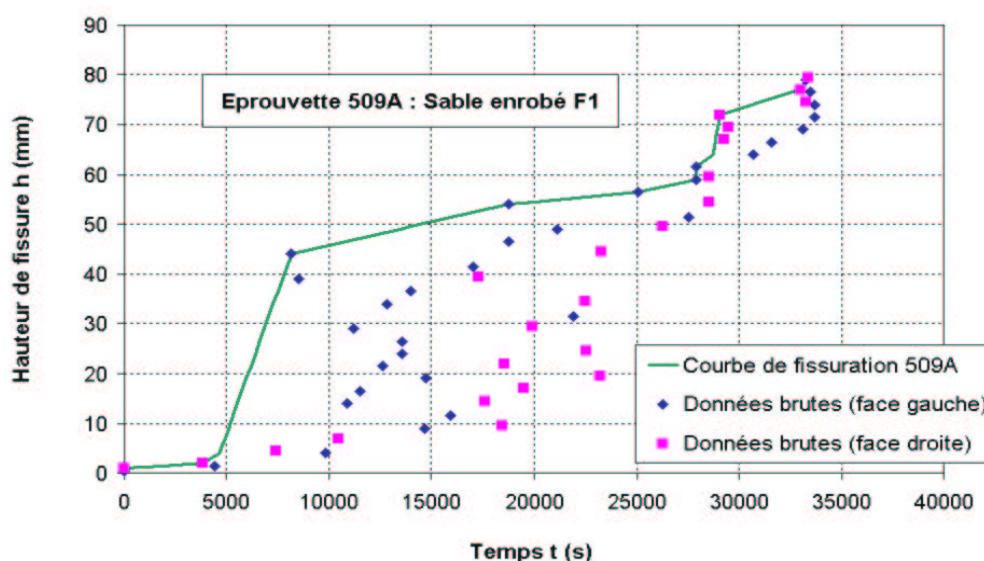


FIGURE 5.23. *Interprétation des données brutes issues des deux jauges de fissuration par la courbe enveloppe des temps minimaux*

Cette méthode d'exploitation est appliquée aux mesures réalisées sur chaque éprouvette. Une moyenne sur les 2 ou 3 courbes obtenues pour chaque type est ensuite réalisée (Fig. 5.24).

#### 5.2.4.2 Analyse des résultats - sable enrobé

Dans ce paragraphe, nous étudions les résultats des tests de retrait-flexion sur des éprouvettes renforcées (509, 530, 531) par une couche de sable enrobé et nous les comparons à ceux obtenus pour une éprouvette témoin sans renfort (506) (Fig. 5.25).

Notons que les données brutes de l'éprouvette 506B, cerclées de rouge sur la figure Fig. 5.25(a), ne sont pas prises en compte dans l'exploitation des résultats. En effet, leur présence correspond davantage à une amorce de fissuration par le haut de l'éprouvette qu'à une rupture brutale par le bas. Il en est de même pour les données également cerclées de rouge des éprouvettes 530A et 530B (Fig. 5.25(d)).

Par ailleurs, un décollement entre les plaques en aluminium et l'éprouvette 531B a été observé en cours d'essai. Comme cet essai ne peut donc pas être pris en compte, les seules données exploitables pour la plaque 531 sont donc les mesures faites sur les éprouvettes 531A et 531C.

Nous avons reporté sur la figure Fig. 5.26 les courbes moyennes des résultats exploitables de chaque plaque renforcée par un sable enrobé, ainsi que celle de la plaque témoin.

Sur ce graphe, nous observons que la première partie de la courbe, caractérisée par une pente faible et qui correspond à la phase d'initiation de la fissure, est plus longue lorsque les éprouvettes sont renforcées. Il en est de même pour la phase de propagation de la fissure (pente plus importante correspondant à une augmentation de la vitesse de fissuration). Le rôle du sable enrobé comme système retardateur de fissuration est donc ici clairement illustré.

Du point de vue de la durée de fissuration complète, les trois configurations testées conduisent à des résultats équivalents (environ 27500s). La procédure classique d'exploitation des essais de type retrait-flexion fait intervenir le paramètre  $r$  pour comparer les temps de fissuration complète.  $r$  est appelé "temps réduit" et est défini comme le rapport entre le temps de fissuration des couches

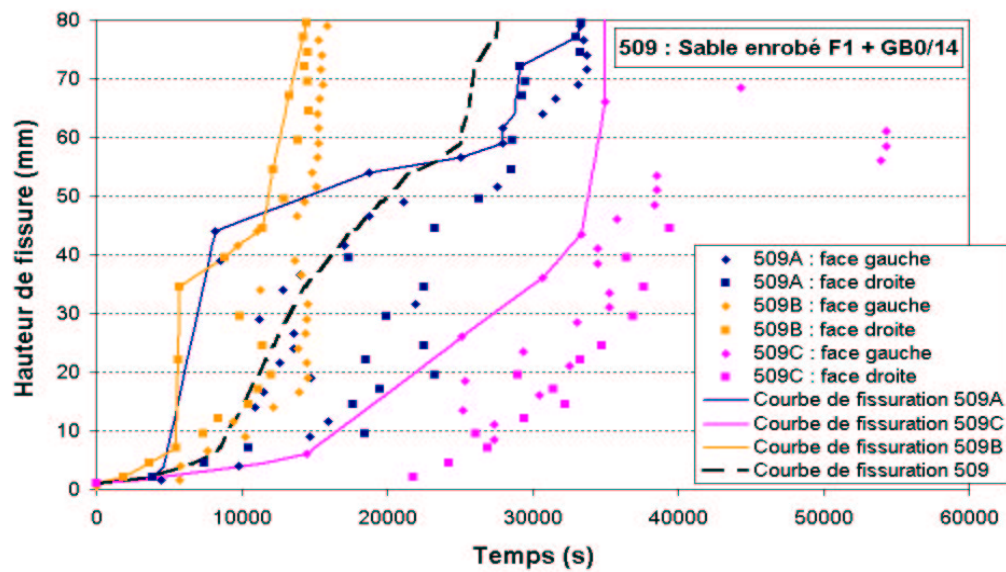


FIGURE 5.24. Courbe de fissuration moyenne des éprouvettes 509A, 509B et 509C

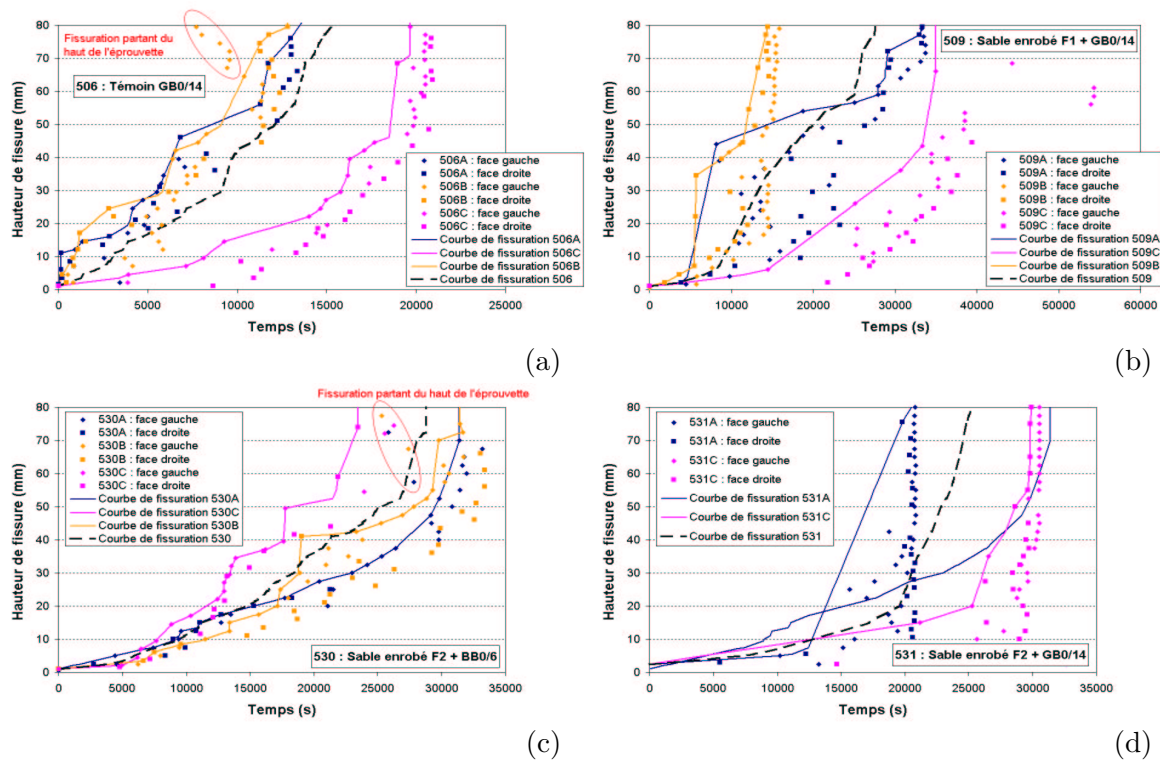


FIGURE 5.25. Courbes de fissuration des éprouvettes issues des plaques (a) 506, (b) 509, (c) 530 et (d) 531

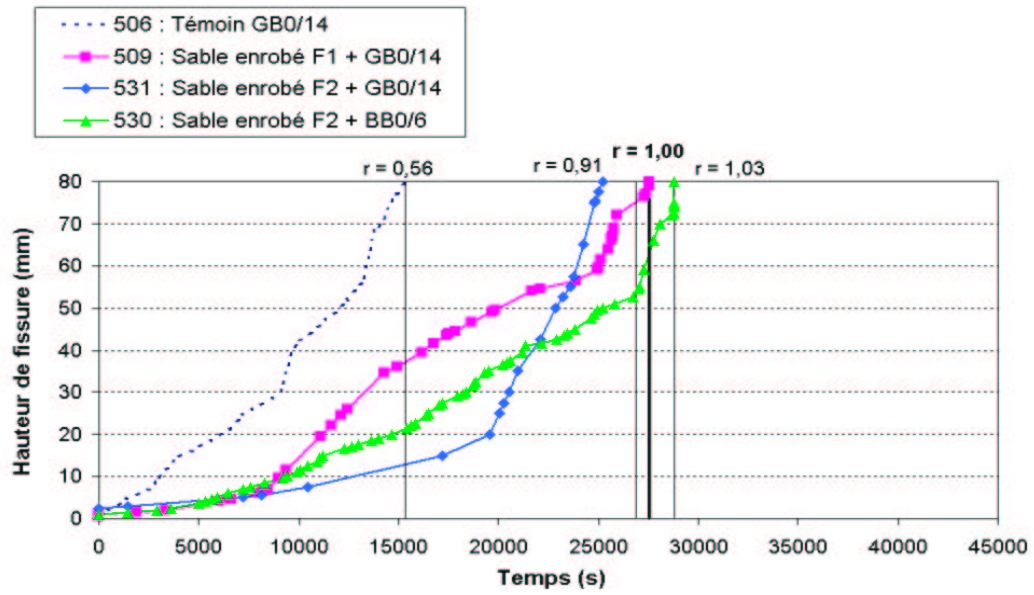


FIGURE 5.26. Comparaison des temps de fissuration pour les éprouvettes équipées d'un système de type sable enrobé

testées et le temps de fissuration du témoin bicouche, qui correspond à un sable enrobé de type F1. A partir de ce coefficient  $r$ , le système retardateur de fissuration est classé comme :

$$\begin{cases} \text{inefficace} & \text{si } r \leq 0.7 \\ \text{moyennement efficace} & \text{si } 0.7 < r \leq 0.9 \\ \text{très efficace} & \text{si } r > 0.9 \end{cases} \quad (5.1)$$

Les valeurs de  $r$ , calculées pour chaque cas, sont reportées sur Fig. 5.26. Alors que pour l'éprouvette témoin, sans complexe, nous obtenons un temps réduit de 0.56, celui-ci ne varie que de quelques pourcents autour de 1, pour les trois configurations bicouches à base de sable enrobé.

Tout en nuancant la conclusion par le fait que le nombre d'éprouvettes testées dans chaque cas est faible, ces essais semblent montrer que la différence entre les deux formulations de sable enrobé est négligeable du point de vue de la remontée de fissure. De même, l'influence de la compacité et de la taille des granulats de la couche de roulement ne semblent a priori pas prépondérante. Dans la suite, nous continuerons à considérer la configuration de la plaque (sable enrobé F1 + GB0/14) comme la configuration de référence pour le calcul du temps réduit  $r$ .

#### 5.2.4.3 Analyse des résultats - grille en fibres de verre

Nous étudions à présent l'efficacité d'une interface en grille en fibres de verre. Les courbes de fissuration des éprouvettes dotées de ce type de renfort (plaque 511) sont présentées sur le graphe Fig. 5.27.

Remarquons que, lors de l'essai sur l'éprouvette 511C, l'enregistrement des données a été rapidement interrompu pour des raisons d'ordre technique. Nous avons donc choisi de ne pas tenir compte de cette troisième éprouvette dans la moyenne effectuée.

Nous avons superposé cette courbe moyenne avec celles obtenues pour le témoin sans système et la plaque de référence (sable enrobé F1 + GB0/14) sur la figure Fig. 5.28. L'observation de ces courbes montre que la phase d'initiation de fissuration semble plus courte pour les grilles en fibres de verre et la phase de propagation plus longue. Toutefois cette remarque est à nuancer parce

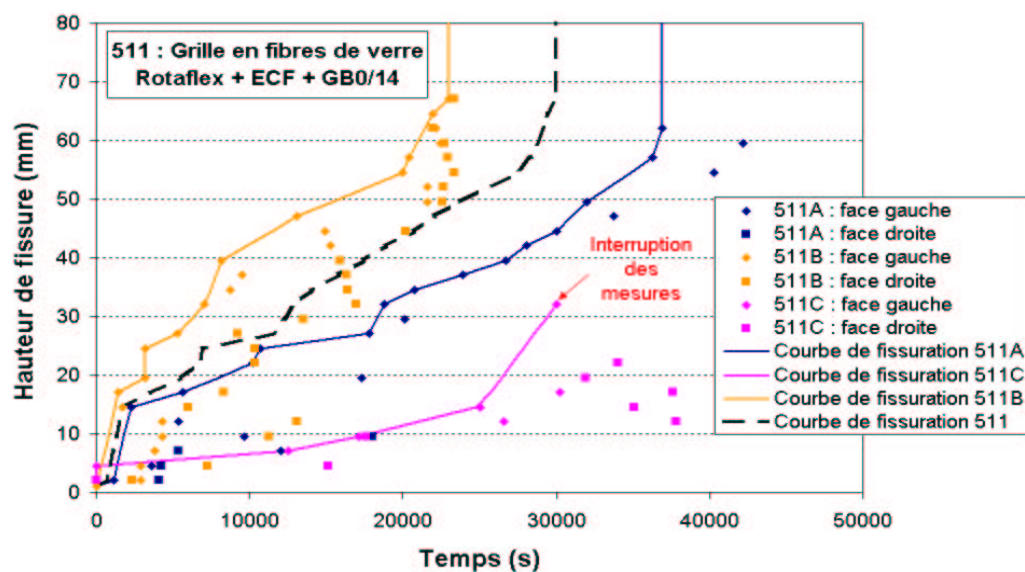


FIGURE 5.27. Courbes de fissuration des éprouvettes issues de la plaque 511

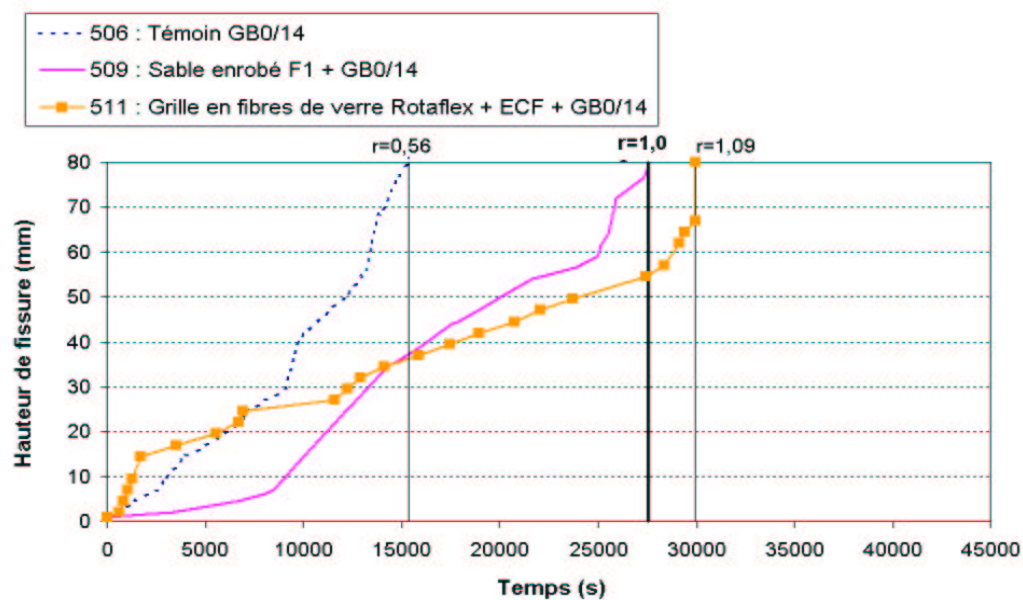


FIGURE 5.28. Comparaison des temps réduits fibres de verre / sable enrobé



qu'elle est basée sur l'observation de deux essais uniquement et que le troisième essai, inachevé, présente une phase d'initiation plus longue.

Le temps moyen de fissuration totale est de 30000s, il correspond à un temps réduit  $r = 1.09$ . Ce système devrait donc être classé parmi les interfaces très efficaces. Toutefois, nous rappelons que le nombre d'essais est trop faible pour conclure plus précisément quant à l'efficacité des systèmes.

#### 5.2.4.4 Analyse des résultats - Mesh Track

Les courbes de fissuration obtenues pour les éprouvettes renforcées avec une grille en acier de type Mesh Track sont présentées à la figure Fig. 5.29. Elles sont comparées à celles obtenues pour les éprouvettes témoins sans systèmes et les éprouvettes de référence avec un sable enrobé de type F1 (Fig. 5.30).

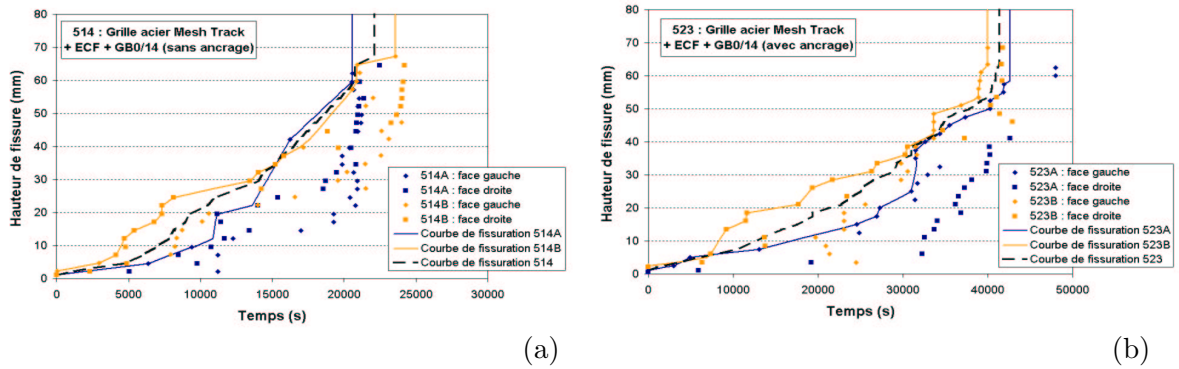


FIGURE 5.29. Courbes de fissuration des éprouvettes issues des plaques (a) 514 et (b) 523

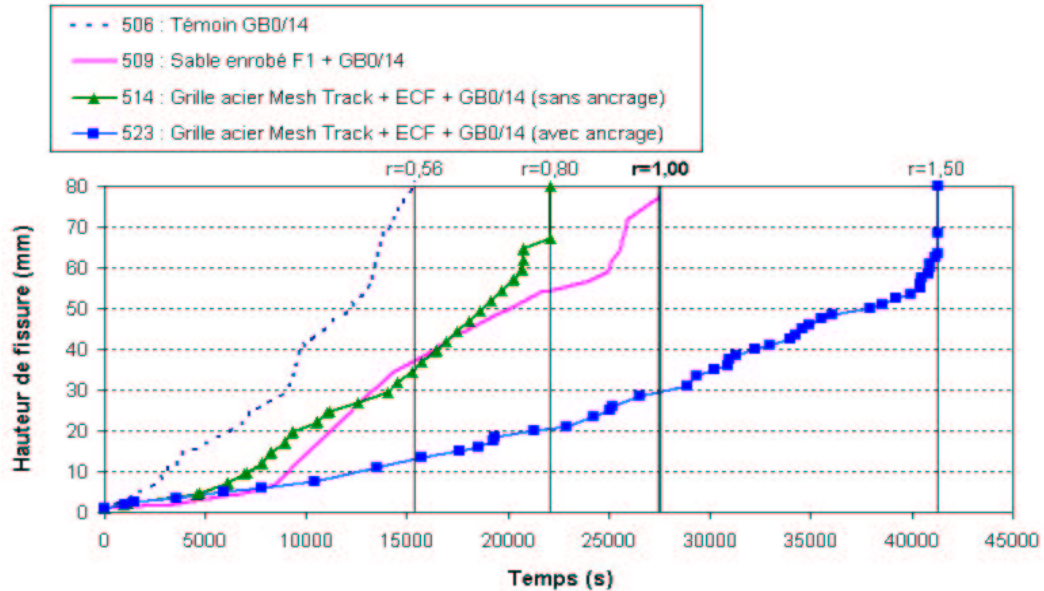


FIGURE 5.30. Comparaison des temps réduits Mesh Track / sable enrobé

Dans les éprouvettes 514A et 514B, le Mesh Track a été simplement noyé dans l'ECF. Le temps moyen de remontée complète de la fissure à travers l'éprouvette est dans ce cas très faible (22000s) et correspond à un temps réduit  $r = 0.80$ . Nous avons observé sur les éprouvettes testées, que la

grille déformée avait glissé dans l'ECF et n'avait donc pas été mobilisée. La largeur des éprouvettes étant trop faible par rapport à la largeur des mailles, la grille n'est pas ancrée comme elle pourrait l'être dans la chaussée. C'est pourquoi, comme nous l'avons déjà précisé au paragraphe 5.2.2, nous avons choisi de tester à nouveau ce complexe en ajoutant des barres longitudinales soudées à la grille qui ont pour rôle d'ancrer la grille dans l'ECF (Fig. 5.19).

Les éprouvettes 523A et 523B sont équipées de ce type d'ancrage. Les performances en termes de temps réduit sont nettement améliorées puisque ce paramètre est dans ce cas égal à 1.50 (Fig. 5.30) et le temps moyen de fissuration complète atteint 41000s. Cette interface doit donc être classée parmi les interfaces très efficaces. Notons qu'avec ou sans ancrage, la présence de la grille Mesh Track permet d'allonger la phase d'initiation de la fissuration par rapport au cas témoin sans système retardateur.

Cependant, les très bonnes performances de ce renfort doivent être nuancées par le fait qu'un décollement apparaît rapidement au niveau de la grille, soit dans la couche d'ECF, soit à l'interface entre la plaque soufre et l'ECF (Fig. 5.31).

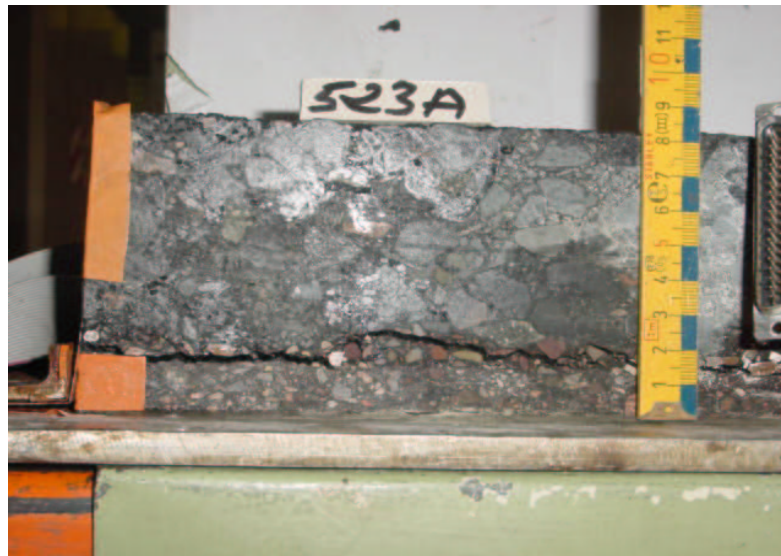


FIGURE 5.31. *Propagation horizontale partielle de la fissure*

#### 5.2.4.5 Analyse des résultats - solution ARCELOR

Les courbes de fissuration obtenues pour les éprouvettes renforcées avec une grille en acier de type solution ARCELOR sont présentées à la figure Fig. 5.32. Elles sont comparées à celles obtenues pour les éprouvettes témoins sans systèmes et les éprouvettes de référence avec un sable enrobé de type F1 (Fig. 5.33).

En utilisant la même méthode de traitement des mesures, nous obtenons pour les éprouvettes renforcées avec la solution ARCELOR des temps réduits très différents variant entre  $r = 0.78$ , lorsque la grille n'est pas noyée dans l'ECF et que la couverture bitumineuse est en GB0/14, et  $r = 1.34$ , lorsque la grille est noyée dans l'ECF et que la couverture bitumineuse est en BB0/6.

Les résultats obtenus pour ce type de renforcement sont donc particulièrement dispersés. Par exemple, pour les deux éprouvettes testées sans ECF, le temps de fissuration totale varie entre 13500s et 29000s, soit du simple au double. La moyenne de ces durées n'est donc pas le paramètre le plus représentatif et il est important de remarquer que le complexe est potentiellement capable de ralentir la fissuration jusqu'à une durée de fissuration complète de 38000s ( $r = 1.39$ , essai 532A).

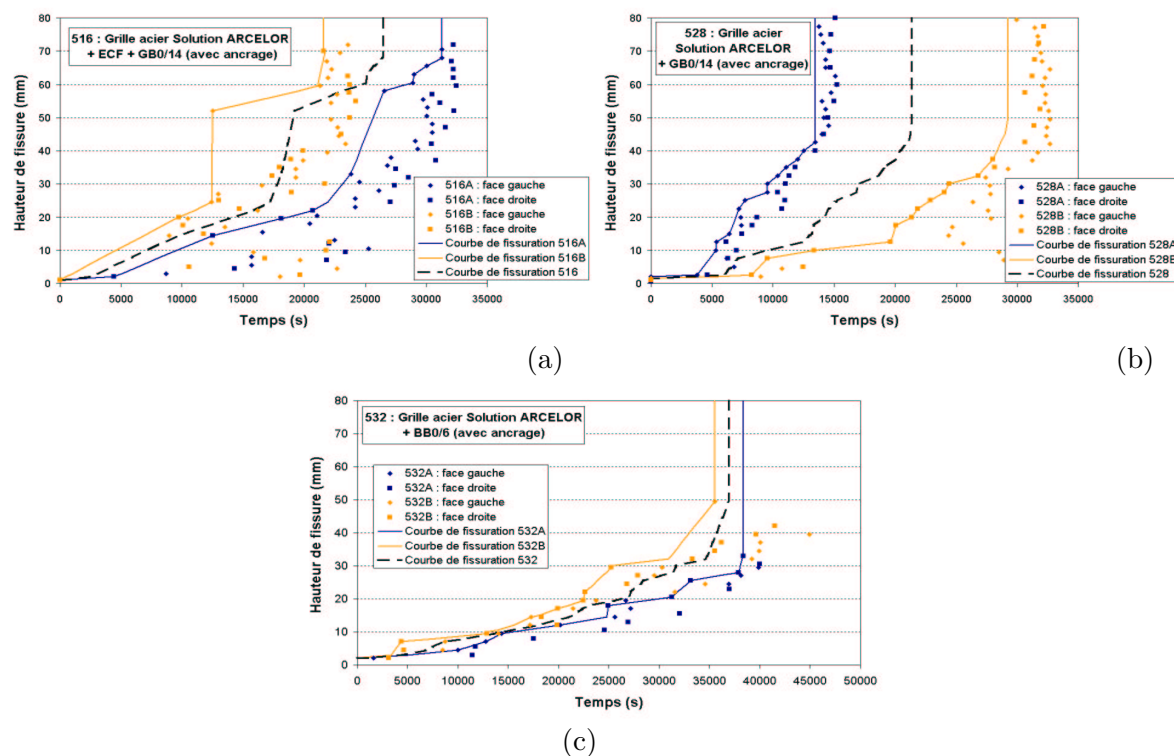


FIGURE 5.32. Courbes de fissuration des éprouvettes issues des plaques (a) 516, (b) 528 et (c) 532

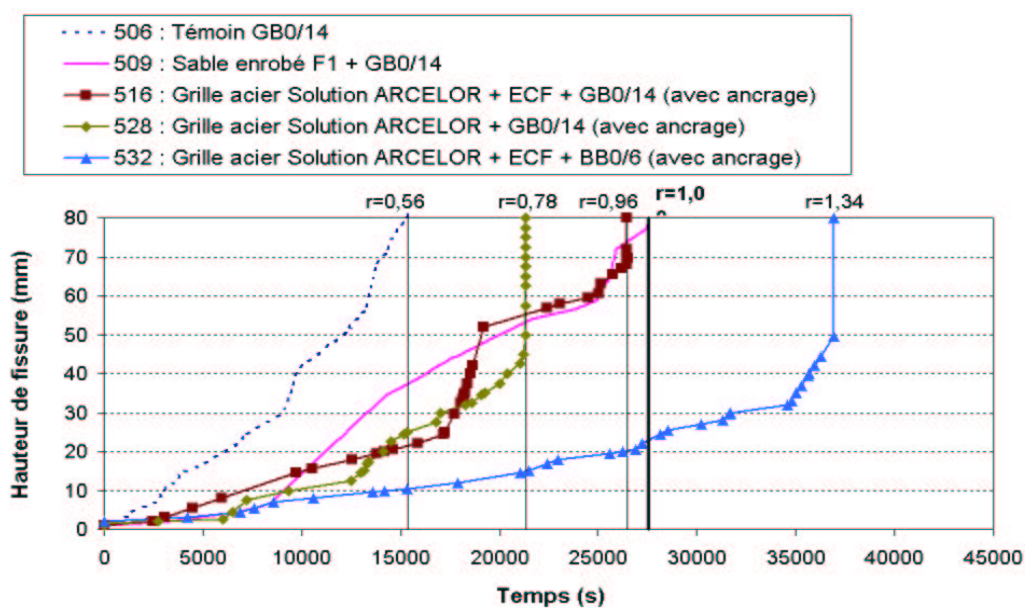


FIGURE 5.33. Comparaison des temps solution ARCELOR / sable enrobé

Nous pouvons donc faire la conclusion nuancée suivante : ce système semble être au moins aussi efficace qu’une interface en sable enrobé. Par contre, l’influence des paramètres tels que la présence d’ECF ou le type de couverture bitumineuse est difficilement identifiable et demanderait un plus grand nombre d’essais.

Par ailleurs, les éprouvettes 528B, 532A et 532B présentent un décollement au niveau de la grille. Comme pour le Mesh Track, la comparaison avec les temps réduits obtenus pour le renfort de référence en sable enrobé est donc délicate car le comportement du multicouche est différent si ses couches ne sont pas liées.

### 5.2.5 Conclusion des essais de retrait-flexion

Du point de vue de la performance de chacun des dispositifs, si l’on se restreint à l’exploitation classique des résultats de ces essais, il apparaît que les systèmes les plus performants sont la grille Mesh Track et la solution ARCELOR noyées dans une couche d’Enrobé Coulé à Froid. Les grilles en fibres de verre présentent une efficacité à peu près semblable à celle relevée pour une couche de sable enrobé, prise comme système de référence.

Toutefois, nous avons vu tout au long de cette analyse que différents points venaient nuancer cette conclusion. Tout d’abord la taille des éprouvettes n’est pas adaptée à tous les systèmes notamment aux grilles en acier. Pour celles-ci nous avons dû améliorer artificiellement l’ancrage afin que la grille soit réellement mobilisée.

Ensuite, l’interprétation classique de cet essai ne tient compte que de la propagation verticale de la fissure. Un décollement de l’interface ne mène pas à la ruine du multicouche mais modifie son comportement et rend délicate les comparaisons entre systèmes.

Enfin, il est important de noter que la dispersion des résultats de l’essai de retrait-flexion est très importante, même si les éprouvettes sont issues d’une même plaque. En effet, la différence entre les temps de fissuration complète peut aller du simple au double.

Pour toutes ces raisons, il paraît nécessaire de passer à une échelle supérieure.

## 5.3 Campagne d’essais FABAC

Nous avons programmé une campagne d’essais sur le bâti FABAC afin de comparer l’efficacité de la solution ARCELOR avec une interface de type sable enrobé, dans un cadre expérimental plus proche de la réalité sur chantier que l’essai de retrait-flexion. Cette campagne entre également dans le cadre d’une thèse du LCPC (thèse de Sergio PEREZ) et d’une collaboration entre ARCELOR et le LCPC. Elle a été réalisée au LCPC Nantes.

L’essai de fatigue FABAC a été conçu dans le cadre du projet national du même nom “FABAC : Chaussées et pistes en béton - Dimensionnement des chaussées en Béton Armé Continu”. C’est un essai de type “structure” qui permet de simuler le passage répété d’un demi-essieu de poids lourds sur une planche d’essai à l’échelle 1 en milieu extérieur. Le bâti FABAC est constitué d’un cadre métallique à l’intérieur duquel tournent quatre essieux jumelés mis en mouvement par un moteur électrique (Fig. 5.34). Chacun d’entre eux passent à une vitesse moyenne de  $4\text{ km/h}$  sur la planche d’essai, dont la longueur utile est de  $2\text{ m}$ .

### 5.3.1 Géométrie des planches d’essai et instrumentation

Nos rappelons que l’objectif de cette campagne est d’évaluer l’efficacité de la solution ARCELOR par rapport à une solution existante, le sable enrobé, et de vérifier la cohérence des résultats avec ceux obtenus lors de la campagne d’essais de retrait-flexion. Nous souhaitons donc considérer



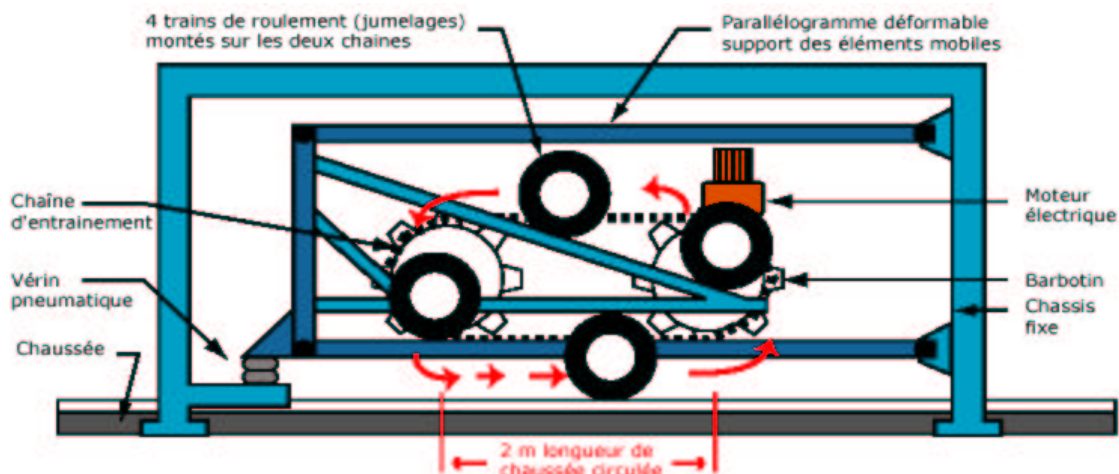


FIGURE 5.34. Schéma descriptif des machines FABAC [Pouteau, 2004]

Joint	1	2	3	4	5	6	7	8
Battement maxi ( $\cdot 10^{-2}mm$ )	35	29	44	30	33	28	31	39

TABLEAU 5.11. Battement à proximité de l'essieu au niveau de chaque joint avant mise en place des couches supérieures

une structure de type semi-rigide constituée de matériaux dont les formulations sont les mêmes que celles utilisées pour les essais de retrait-flexion. La couche de roulement en béton bitumineux (BB0/6), la couche de sable enrobé et l'enrobé coulé à froid (ECF), dans lequel la solution ARCELOR est noyée, sont ainsi définis par les formulations présentées dans les tableaux (Tab. 5.9), (Tab. 5.3) et (Tab. 5.6) respectivement.

En ce qui concerne la couche d'assise traitée aux liants hydrauliques, les planches d'essai ont été réalisées sur une piste en béton existante, réalisée dans le cadre d'une thèse précédente [Pouteau, 2004]. Elle présente une longueur de  $27.5m$  et une largeur de  $2m$ . Elle est composée du haut vers le bas de :

- une dalle en béton hydraulique de  $8cm$  d'épaisseur avec un pas de fissuration transversale de  $2.75m$ , soit 9 joints,
- une couche de grave bitume (GB) de  $8cm$  d'épaisseur,
- une couche en sable ciment de  $15cm$  d'épaisseur,
- un sol support de type PF2.

Cette structure représente donc la base de la chaussée semi-rigide que nous voulons réaliser. Toutefois, le battement des joints disponibles étant très faible ( $10 \cdot 10^{-2}mm$  en moyenne), un sciage de la couche de grave bitume, ainsi qu'une sollicitation en fatigue supplémentaire ont été réalisés. Finalement, avant la mise en place des complexes retardateurs de fissuration et de la couche de roulement, le battement des joints à proximité de l'essieu de 13 tonnes utilisé était en moyenne de  $34 \cdot 10^{-2}mm$  (voir Tab. 5.11).

Finalement, le plan d'expériences de cette campagne est présenté dans le tableau Tab. 5.12 et sur la figure Fig. 5.35. Nous allons donc utiliser 8 joints sur les 9 disponibles. Il existe deux bâtis d'essai FABAC disponibles au LCPC Nantes qui peuvent fonctionner simultanément. Une programmation en quatre phases de ces machines a donc été effectuée pour réaliser les 8 essais.

La progression de la fissure est mesurée grâce à des jauges de fissuration de même type que celles

Système retardateur de fissuration	Couche de roulement	Nombre de joints	Nom des joints
Témoin (sans système)	BB0/6 (6cm)	4	3, 4, 5, 8
Sable enrobé F2 (2cm)	BB0/6 (4cm)	2	1, 2
Solution ARCELOR + ECF (1cm)	BB0/6 (5cm)	2	6, 7

TABLEAU 5.12. Description de la composition des planches d'essais FABAC

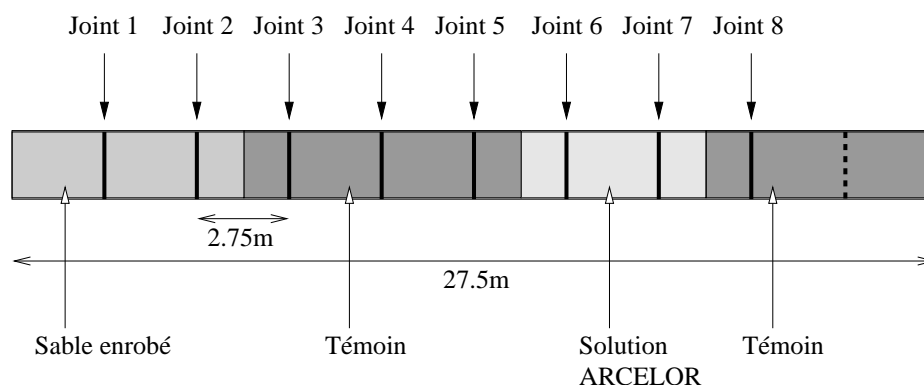


FIGURE 5.35. Schéma de la piste d'essais

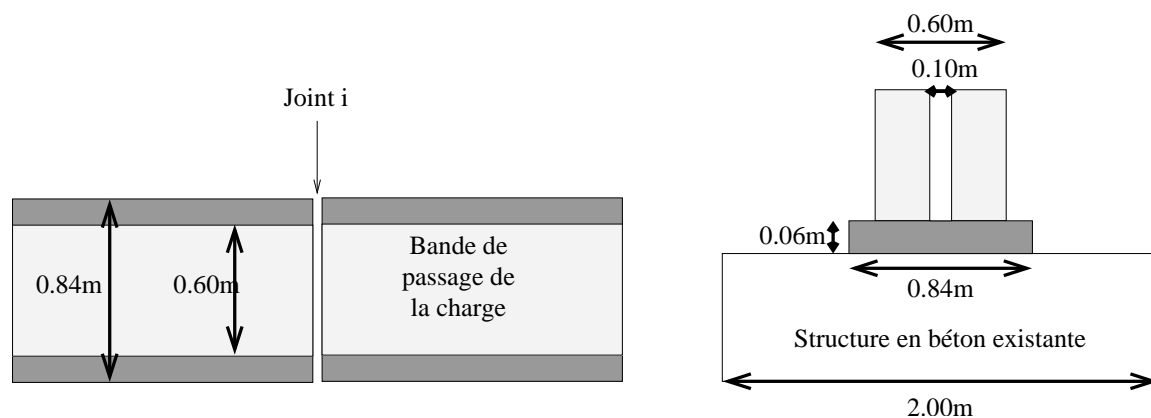
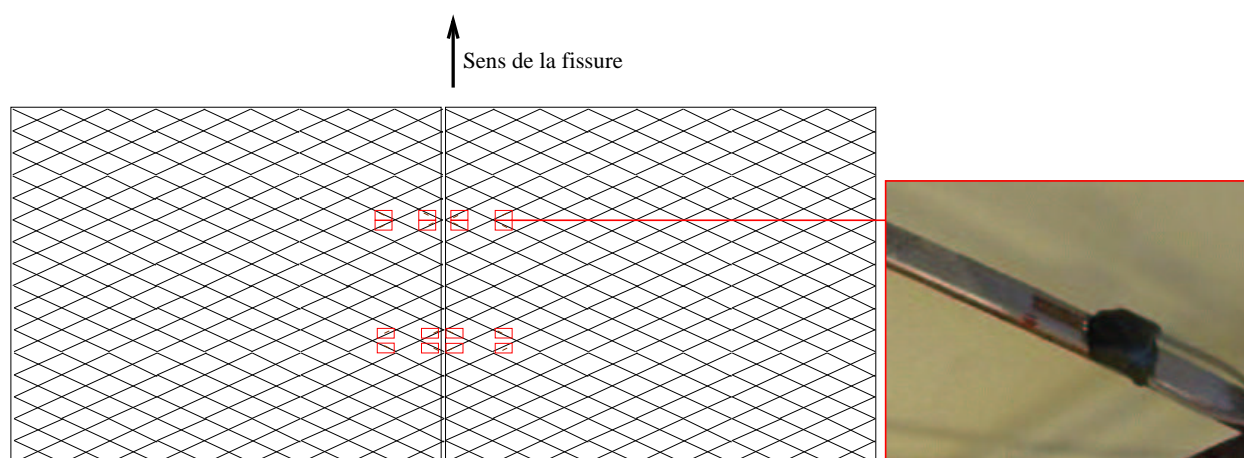
utilisées pour la campagne d'essais de retrait-flexion. Ce dispositif de mesure a l'inconvénient de fournir une observation du phénomène uniquement sur le bord de l'éprouvette. Aussi, afin de placer ces jauges au plus proche de la zone de chargement et d'éviter le fluage de la couche bitumineuse, nous avons choisi de considérer une largeur d'essai de 84cm : cette valeur correspond à la largeur de la charge (60cm) majorée de deux surlargeurs égales au double de l'épaisseur de la couche bitumineuse ( $2 \times (2 \times 6cm)$ ) pour éviter le phénomène de fluage. Pour obtenir cette largeur, les matériaux ont été mis en place sur une largeur de 1.40m (largeur du finisseur) puis sciés sur une bande de 84cm, ce qui permet d'obtenir une surface propre, apte à recevoir les jauges de fissuration par collage.

Chaque planche d'essai est pourvue de deux jauges de fissuration et de divers dispositifs de mesure : thermocouples, capteurs de déplacement, jauges de déformation. Ces moyens ne sont pas détaillés ici car ils correspondent davantage aux besoins de l'étude générale de la fissuration des chaussées dont fait l'objet la thèse de Sergio PEREZ.

Les planches renforcées par la solution ARCELOR ont la particularité d'être équipées de 16 jauges de déformation supplémentaires, collées sur les brins de la grille en acier dont est composée cette solution. Le plan de leur positionnement est présenté à la figure Fig. 5.37.

### 5.3.2 Premières conclusions des essais FABAC

Le développement de la nouvelle solution appelée solution ARCELOR doit évidemment passer par une étude de la faisabilité de mise en place sur chantier. La fabrication des planches d'essai renforcées avec cette grille représentait ainsi la première expérimentation de pose de cette solution à une échelle quasi-réelle. Aucun problème propre à ce système n'ayant été relevé, la mise en place d'une telle solution semble être réalisable sur chantier.

FIGURE 5.36. *Géométrie d'un essai*FIGURE 5.37. *Schema du positionnement des 16 jauges de déformation supplémentaires sur la grille de type solution ARCELOR*

Au moment de la rédaction de ce mémoire, la première paire d'essais a été réalisée. Elle concernait le joint 3 (structure témoin sans renfort) et le joint 7 (utilisation de la solution ARCELOR noyée dans une couche d'ECF). Ces premiers essais de mise au point ont été menés jusqu'à rupture totale de la couche bitumineuse supérieure. Toutefois nous avons rencontré certaines difficultés de détection du chemin de fissuration. En effet, les conditions extérieures augmentent les difficultés de réalisation de collage propre des jauges de fissuration et de soudage efficace des fils de ces jauges. De plus, la largeur de la jauge de fissuration limite l'espace de détection de la fissuration. Les fissurations observées pour ces premiers essais sont soit passées sous la jauge sans la détériorer (problème de collage), soit passées à l'extérieur de la surface d'action de la jauge (problème de taille des jauges). Dans la suite du programme expérimental, une amélioration des moyens de mesure sera nécessaire. Elle consistera sans doute à porter un soin tout particulier au collage des jauges de fissuration, à utiliser des jauges plus longues (augmentation de l'espace de détection) et à connecter ces jauges à la centrale d'acquisition au moyen de broches de connection, qui sont plus fiables que des soudures fils à fils.

Le manque d'information métrologique ne nous permet pas de conclure quantitativement quant à l'efficacité de la solution ARCELOR. Toutefois, nous avons pu observer certaines caractéristiques de la fissuration. Pour les deux planches, un décollement de l'interface au-dessus de la couche en béton a été observé avant la rupture totale. De plus, la largeur de la fissuration verticale plus marquée en haut de couche semble indiquer une propagation de haut en bas de la fissure.

## Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons proposé un classement des essais de caractérisation selon trois catégories : les "essais matériaux", les "essais multicouches" et les "essais structure".

Cependant, si le passage "essais matériaux" - "essais multicouches" est assez naturel, le pas entre les "essais multicouches" et les "essais structure" est plus important. D'une part, en termes de dimensions d'éprouvette, la fabrication d'une éprouvette de 50cm ne demande pas les mêmes moyens que celle d'une planche de plusieurs mètres. De même la durée d'essai passe de quelques heures à plusieurs jours voir mois. Dans ce cadre, l'essai MMLS3 à l'échelle 1 : 3 a l'avantage de représenter une étape intermédiaire.

D'autre part, même si ce point n'a pas été développé dans ce chapitre, la grande différence entre les "essais multicouches" (essais de roulement mis à part) et les "essais structure" est aussi liée à l'insertion de période de repos. En effet, les "essais multicouches" ne simulent en général pas le phénomène d'autoréparation des matériaux bitumineux ([Maillard et al., 2003]).

La seconde section de ce chapitre a été consacrée à l'analyse d'une campagne d'essais de retrait-flexion (type "essais multicouches"). Nous avons ainsi pu mettre en évidence la bonne efficacité des interfaces en sable enrobé, ainsi que des grilles en fibres de verre et des grilles métalliques. Toutefois, cette campagne nous a également permis de saisir plus concrètement les limites de ce type d'essai en termes de taille des éprouvettes, de dispersion des résultats et de non prise en compte de période de repos.

Enfin, la campagne d'essais FABAC (type "essais structure") a fait l'objet de la troisième section du chapitre. Cette campagne est en cours de réalisation. Les problèmes de détection du chemin de fissuration, rencontrés lors des premiers essais, ne nous permettent pas de conclure quant à l'efficacité de la solution ARCELOR. Des améliorations des moyens de mesure sont prévues pour les essais suivants. Cependant, ce début de campagne a mis en évidence les inconvénients liés à la mise en oeuvre d'essais à échelle 1 dans des conditions extérieures : les conditions de température ne sont pas maîtrisées, ce sont des essais longs, onéreux et lourds à mettre en place.

Pour conclure, il semblerait intéressant pour l'étude de la fissuration réfléctive de concevoir des essais intermédiaires permettant de simuler des effets de structure et de prendre en compte des conditions de chargement plus réalistes (période de repos, vitesse, charge, ...), tout en respectant un encombrement et une durée d'essai raisonnables.



## Chapitre 6

# Analyse d'une chaussée semi-rigide fissurée

### Introduction

La méthode expérimentale qui fait l'objet de cette partie est mise en oeuvre sur un bâti dans le cadre d'un dispositif d'essai que nous nommons SIFIRE (SIMulation de FIssuration REflective). Sa conception est basée sur le passage d'une modélisation tridimensionnelle de la chaussée à un modèle bidimensionnel de l'éprouvette.

Dans ce chapitre, nous analysons le fonctionnement d'une chaussée semi-rigide soumise à un chargement de trafic. Pour cela, nous proposons de retenir plusieurs fonctions caractérisant le comportement de la structure et de repérer les positions critiques de la charge de trafic qui permettent de définir un cycle de chargement. La valeur des fonctions en ces points sont les grandeurs de référence que nous souhaitons reproduire dans l'essai. La première partie est consacrée à la définition des grandeurs de référence à partir d'une analyse qualitative d'une chaussée semi-rigide quelconque et la seconde concerne le calcul de ces valeurs pour un cas particulier de structure et de chargement.

### 6.1 Analyse qualitative d'une chaussée semi-rigide fissurée

#### 6.1.1 Définition des hypothèses générales de la méthode expérimentale proposée

Le domaine d'application de la méthode expérimentale proposée correspond à l'ensemble des **chaussées semi-rigides**. Ces structures sont caractérisées par une couche supérieure souple et peu épaisse et une couche inférieure raide et épaisse. De plus, la nature de cette dernière (traitement aux liants hydrauliques), fait qu'elle est en général considérée comme fissurée transversalement sur toute son épaisseur, dès la mise en circulation.

L'hypothèse de base de la démarche de dimensionnement présentée dans la suite est la restriction de la simulation à la phase d'**initiation de la fissuration**. Nous considérons que c'est cette phase qui est déterminante pour juger l'efficacité d'un complexe retardateur de fissuration. Nous allons donc considérer une chaussée dont la couche inférieure est fissurée et la couche supérieure saine, la liaison entre les deux couches étant parfaite.

Par ailleurs, les forces qui agissent sur la structure de chaussée, sont le poids propre de la structure, le chargement de trafic et différents chargements thermiques. Le poids propre est une force constante dans le temps et dans l'espace et nous avons déjà vu dans le paragraphe 5.2.1 que les

deux derniers types de chargement ont lieu sur deux échelles de temps différentes. Nous appelons  $t$  la variable de temps qui correspond au chargement de trafic et  $\tau$  la période de ce chargement cyclique qui est de l'ordre de la seconde.  $t'$  est la variable de temps qui décrit les chargements thermiques. La période de cette sollicitation est de l'ordre du jour pour les variations jour/nuit ou de l'année pour les variations été/hiver.

Comme le trafic est un chargement cyclique rapide et que l'on considère des matériaux bitumineux dans la couche supérieure, les contraintes créées vont rapidement se relaxer. De plus, si on suppose que les matériaux bitumineux ont des caractéristiques de rigidité à long terme qui tendent vers zéro, nous pouvons en déduire qu'au bout de quelques cycles la contrainte moyenne sera nulle. Parallèlement, les chargements thermiques qu'ils soient quotidiens ou annuels sont lents par rapport au trafic. Les contraintes de traction ou de compression provoquées par cette cinétique thermique ne vont donc pas se relaxer et vont créer dans la structure un champ de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}^i(\underline{x}, t')$ , constant en  $t$  mais qui dépend de la variable d'espace  $\underline{x}$  et de la variable de temps  $t'$ . Nous appelons alors  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t')$  la moyenne non nulle sur un cycle de chargement de trafic, de la contrainte induite par ce type de chargement, définie par :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t') = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t, t') dt$$

De plus, le trafic correspond à une force appliquée un grand nombre de cycles ( $N > 10^4$  cycles). Dans ce contexte de chargement en fatigue, c'est la variation des contraintes sur chaque cycle qui nous intéresse. Le poids, qui est une force constante, n'a aucune influence sur les variations de contrainte. Nous pouvons donc nous affranchir de la prise en compte de cette sollicitation et étudier le fonctionnement de la chaussée en termes de variations par rapport à un état initial de la chaussée soumise uniquement à son poids propre.

Finalement, la relation de comportement entre le champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t, t')$  dans la chaussée et son champ de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t, t')$  peut donc être exprimée de la façon suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t, t') = \underline{\underline{\underline{K}}}_\tau(\underline{x}) : (\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t, t') - \underline{\underline{\varepsilon}}^i(\underline{x}, t'))$$

avec  $\underline{\underline{\underline{K}}}_\tau(\underline{x})$  le tenseur élastique de rigidité d'ordre 4 correspondant au comportement des matériaux pour une sollicitation rapide de type trafic sur une période  $\tau$ , dans les conditions de température et de fréquence adéquates.

Dans l'analyse réalisée dans ce chapitre, nous choisissons de nous limiter au **chargement cyclique lié au trafic**, par souci de simplicité. Mais cette démarche peut être aisément adaptée au cas où l'ensemble des sollicitations (trafic + thermique) est pris en compte en choisissant la solution  $(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t, t') ; \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t, t'))$  appropriée.

L'hypothèse de chargement thermique nul nous permet d'éliminer la variable  $t'$  et de définir comme nulle la moyenne de la contrainte. Les équations que doivent vérifier les champs solutions  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t)$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^i(\underline{x})$  sont donc :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\underline{K}}}_\tau(\underline{x}) : (\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t) - \underline{\underline{\varepsilon}}^i(\underline{x})) \quad (6.1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = 0 \quad (6.2)$$

Pour résoudre ce problème, nous proposons de considérer le problème auxiliaire élastique faisant intervenir la relation de comportement suivante :

$$\partial \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = \underline{\underline{\underline{K}}}_\tau(\underline{x}) : \partial \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t)$$



La moyenne du champs de contrainte solution de ce problème auxiliaire est appelée  $\partial\bar{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$  et est non nulle :

$$\partial\bar{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \partial\bar{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) dt$$

La solution du problème complet peut alors être exprimée en fonction de la solution du problème auxiliaire :

$$\begin{cases} \underline{\sigma}(\underline{x}, t) = \partial\bar{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) - \partial\bar{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \\ \underline{\varepsilon}(\underline{x}, t) = \partial\bar{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t) \\ \underline{\varepsilon}^i(\underline{x}) = \underline{K}^{-1}(\underline{x}) : \partial\bar{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \end{cases} \quad (6.3)$$

Pour conclure, nous pouvons donc établir la solution du problème complet (6.3), qui vérifie bien les équations (6.1) et (6.2), à partir de la solution du problème auxiliaire qui consiste à analyser le fonctionnement d'une chaussée élastique soumise uniquement à un chargement de trafic.

### 6.1.2 Définition des fonctions caractérisant le fonctionnement d'une chaussée fissurée

Comme nous l'avons déjà vu, une chaussée semi-rigide repose sur un sol-support et est composée de deux couches : une couche supérieure souple et peu épaisse et une couche inférieure raide, épaisse et fissurée dans la direction perpendiculaire à la direction de circulation. Une modélisation tridimensionnelle complète est envisageable mais il nous paraît plus pertinent d'effectuer quelques simplifications justifiées et de réduire ainsi l'étude complète des tenseurs de contrainte et de déformation existants dans une chaussée à l'étude de quelques fonctions scalaires représentatives du fonctionnement global.

D'après la définition du problème auxiliaire établi dans le paragraphe précédent, nous étudions la chaussée, comme une structure élastique bicouche reposant sur un massif élastique semi-infini, soumise uniquement à un chargement de trafic (Fig. 6.1). Le champ solution en termes de contraintes, respectivement de déformations, est noté  $\partial\bar{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$ , respectivement  $\partial\bar{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}, t)$ .

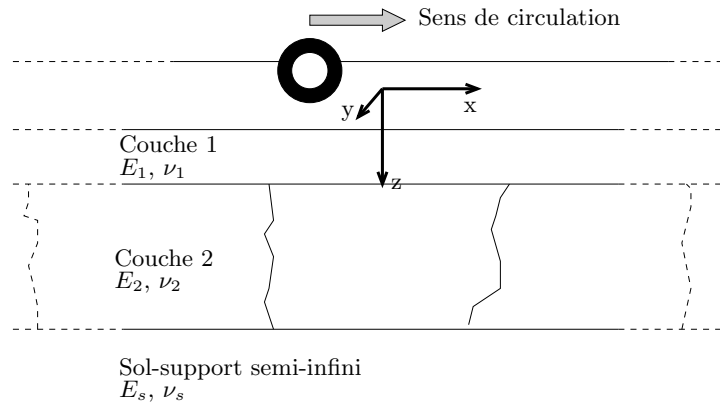


FIGURE 6.1. Schéma d'une chaussée bicouche fissurée

L'hypothèse d'élasticité et de chargement unique permet de simplifier le problème mais les champs de contrainte et de déplacement dans la structure restent dépendants des trois variables d'espace  $x$ ,  $y$  et  $z$  (tels que  $\underline{x} = (x, y, z)$ ), ainsi que de la variable de temps  $t$ . Nous notons ici  $x$ , l'abscisse qui décrit la direction longitudinale de la chaussée et qui correspond également à la direction de circulation du trafic,  $y$  la direction transverse et  $z$  la profondeur. Le temps  $t$  intervient à travers la description du chargement de trafic. En effet, même si la charge imposée

a une intensité constante, la surface sur laquelle elle s'applique se déplace en fonction du temps le long de l'axe  $x$ . Si nous supposons que la vitesse  $v$  de ce mouvement est constante, alors il est équivalent de considérer la variable  $xc$  représentant l'abscisse  $x$  du centre de la charge à l'instant  $t$ , ou de considérer la variable  $t$ .

Toutefois, le propos de cette analyse est le fonctionnement de la chaussée à proximité d'une fissure transversale. Nous pouvons donc nous limiter à un domaine restreint au voisinage d'une seule fissure, que l'on choisit de positionner à une abscisse  $x = 0$  et dont la largeur est appelée  $l_f$ . Nous notons  $O$  l'origine telle que  $x_O = y_O = z_O = 0$ . Une coupe longitudinale de cette structure peut alors être schématisée par deux blocs rigides semi-infinis dans la direction de roulement (direction longitudinale), reliés en tête par une couche souple qui les recouvre, et reposant sur un sol-support semi-infini en profondeur (Fig. 6.2).

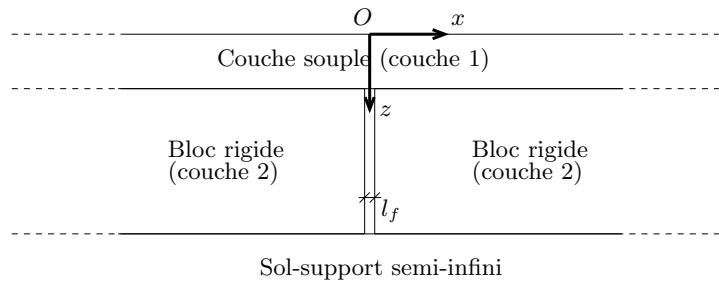


FIGURE 6.2. Schéma d'une coupe longitudinale d'une chaussée à proximité d'une fissure transversale

Notons  $C$  le point au centre de la charge appliquée. Nous connaissons déjà son abscisse selon l'axe  $(Ox)$  :  $x_C = xc$ . Sans réduire la généralité du problème, nous proposons de poser :  $y_C = z_C = 0$ . Le plan  $(Oxz)$  est alors un plan de symétrie du problème.

Jusqu'ici nous avons effectué quelques simplifications du problème au niveau de la géométrie de la structure (une seule fissure), de son comportement (couches élastiques) et de son chargement (pas de prise en compte du poids propre et des chargements thermiques). Il s'agit à présent de spécifier les champs de contrainte et de déformations qui nous intéressent plus particulièrement.

Considérons les propriétés de chaque couche séparément. Le rôle de la couche de sol semi-infinie en profondeur est essentiellement de porter la structure bicouche de chaussée. Puisque l'on travaille en termes de variations par rapport à un état initial où la chaussée est uniquement soumise à son poids propre, la variation de l'état de contrainte ou de déformation dans cette couche ne sera pas représentative et ne nous permettra pas d'obtenir des informations significatives sur le fonctionnement d'une chaussée fissurée sous chargement de trafic. Nous proposons donc de ne pas considérer les tenseurs de contrainte et de déformation dans cette couche.

La couche 1 supérieure est a priori la source principale d'informations sur le comportement de la chaussée. Puisque nous nous intéressons à l'initiation de la fissure, nous avons besoin de connaître l'évolution des composantes du tenseur de contrainte. La répartition des déformations étant une donnée secondaire, nous ne considérons que le tenseur  $\underline{\partial \underline{\sigma}}(x, y, z, t)$  dans la couche 1.

Enfin, nous avons vu que la couche 2 présente une rigidité en termes de module d'Young et d'épaisseur, beaucoup plus importante que celle de la couche 1. Les contraintes développées dans cette couche ne seront donc pas suffisamment significatives. Par contre, la connaissance des déplacements de ces blocs que l'on peut supposer infiniment rigides, autour de la fissure, peut permettre de mieux appréhender la déformation de la structure entière et compléter l'information de l'état de contrainte dans la couche 1. Aussi, dans la couche 2, nous considérons le champ de déplacement  $\underline{\partial u}(x, y, z, t)$ , tel que  $\underline{\partial \underline{\varepsilon}}(x, y, z, t) = \left( \underline{\nabla} \underline{\partial u}(x, y, z, t) \right)_S$ .

En tout point  $(x, y, z)$  et à tout instant  $t$ , il est donc possible de calculer le tenseur de contrainte  $\partial \underline{\sigma}(x, y, z, t)$  dans la couche 1 et les déplacements  $\partial \underline{u}(x, y, z, t)$  dans la couche 2.

Cependant, puisque c'est le comportement à la fissure que nous étudions, nous pouvons nous limiter aux champs dans son plan ( $x \simeq 0$ ), c'est-à-dire  $\partial \underline{\sigma}(0, y, z, t)$  dans la couche 1 supérieure et  $\partial \underline{u}(\pm \frac{l_f}{2}, y, z, t)$  dans la couche 2 puisque les champs ne sont pas définis en  $x = 0$  dans cette couche.

Par ailleurs,  $\partial \sigma_{xx}$  et  $\partial \sigma_{xz}$  sont les principales composantes du tenseur de contrainte qui peuvent être représentatives du fonctionnement de la chaussée. En effet, les directions  $x$  et  $z$  sont les directions principales du problème puisque la charge est appliquée dans la direction  $z$  et qu'elle se déplace dans la direction  $x$ . La couche 1 n'étant pas suffisamment épaisse, la composante  $\partial \sigma_{zz}$  n'est pas significative. En ce qui concerne les déplacements dans la couche 2, pour les mêmes raisons que précédemment nous nous limitons à la composante de  $\partial \underline{u}$  selon  $x$  :  $\partial u_x$ . Nous venons donc de réduire le nombre d'inconnues à 4 fonctions à 3 variables :

$\partial \sigma_{xx}(0, y, z, t)$  et  $\partial \sigma_{xz}(0, y, z, t)$  dans la couche 1

et  $\partial u_x(\pm \frac{l_f}{2}, y, z, t)$  dans la couche 2

Dans la suite de ce raisonnement, nous étudions la variation de ces fonctions avec la variable  $z$ . Les contraintes  $\partial \sigma_{xx}(0, y, z, t)$  et  $\partial \sigma_{xz}(0, y, z, t)$  évoluent en fonction de  $z$ . Elles tendent vers l'infini à proximité de la fissure ; leurs valeurs en ce point ne sont donc pas exploitables. Comme nous souhaitons avoir une vision synthétique du problème, nous proposons de nous intéresser à une intégration de ces fonctions sur l'épaisseur de la couche 1. Nous proposons les notations suivantes :

$$\partial N_y(y, t) = \int_{e_1}^0 \partial \sigma_{xx}(0, y, z, t) dz$$

$$\partial M_y(y, t) = \int_{e_1}^0 \left( z - \frac{e_1}{2} \right) \partial \sigma_{xx}(0, y, z, t) dz$$

$$\partial Q_y(y, t) = \int_{e_1}^0 \partial \sigma_{xz}(0, y, z, t) dz$$

$\partial N_y(y, t)$  représente le moment d'ordre 0 de  $\partial \sigma_{xx}$ , c'est-à-dire l'effort membranaire dans la couche 1 et  $\partial M_y(y, t)$  le moment d'ordre 1 de  $\partial \sigma_{xx}$  ou le moment de flexion selon l'axe  $y$  par rapport au plan médian.  $\partial Q_y(y, t)$  est le moment d'ordre 0 de  $\partial \sigma_{xz}$ , ce qui correspond à l'effort tranchant dans la couche 1.

Notons que ce choix sera aisément adaptable au cas où l'on considère plusieurs couches supérieures au-dessus de la couche fissurée, en les remplaçant par une seule couche avec des caractéristiques équivalentes au multicouche.

Dans la couche 2 inférieure, l'information principale qui nous intéresse est le degré d'ouverture ou de fermeture de la fissure. De façon similaire au traitement effectué pour les composantes du tenseur de contrainte, nous proposons de nous intéresser au moment d'ordre 1 de  $\partial u_x$  et de réduire l'étude de la fonction  $\partial u_x(\pm \frac{l_f}{2}, y, z, t)$  à celle de la variation du mode 1 de part et d'autre de la fissure :

$$\partial \Delta \phi_y(y, t) = \frac{12}{e_2^3} \int_{e_1+e_2}^{e_1} \left( z - \left( e_1 + \frac{e_2}{2} \right) \right) \left( \partial u_x\left(\frac{l_f}{2}, y, z, t\right) - \partial u_x\left(-\frac{l_f}{2}, y, z, t\right) \right) dz$$

$e_1 + \frac{e_2}{2}$  correspond à la côte du plan médian de la couche 2 et le rapport  $\frac{12}{e_2^3}$ , à l'inverse de l'inertie par mètre de largeur (direction  $y$ ) de la couche 2. Ce facteur est introduit afin d'adimensionnaliser la fonction  $\partial \Delta \phi_y(y, t)$  et de lui donner ainsi une interprétation physique de différence de rotation des lèvres de la fissure.

Par ailleurs, nous avons déjà vu que le problème admettait le plan  $(Oxz)$  comme plan de symétrie et que les évolutions selon l'axe  $y$  ne sont pas les principales informations que nous voulons obtenir de la résolution de ce problème. Nous proposons donc de moyenner les fonctions précédentes selon  $y$ . Plusieurs choix d'intervalle d'intégration sont possibles. En effet, nous pouvons considérer par exemple la largeur d'une chaussée complète, la largeur d'une seule voie, ou encore uniquement la largeur de la surface de charge. Nous avons retenu cette dernière option afin de tenir compte du fait que c'est l'amplitude maximale de variation des chargements qui nous intéresse. Il est ainsi cohérent de s'intéresser à ce qui se passe sous la surface de charge. De plus la moyenne permet d'éviter les problèmes liés aux fluctuations des champs sous cette surface. Ainsi, si on appelle  $l_{ch}$  la largeur de la charge selon l'axe  $Oy$ , les champs que nous considérons comme représentatifs du fonctionnement de la chaussée sont les fonctions de  $t$  suivantes :

$$\partial N(t) = \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \int_{e_1}^0 \partial \sigma_{xx}(0, y, z, t) dz dy \quad (6.4)$$

$$\partial Q(t) = \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \int_{e_1}^0 \partial \sigma_{xz}(0, y, z, t) dz dy \quad (6.5)$$

$$\partial M(t) = \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \int_{e_1}^0 \left( z - \frac{e_1}{2} \right) \partial \sigma_{xx}(0, y, z, t) dz dy \quad (6.6)$$

$$\partial \Delta \phi(t) = \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \frac{12}{e_2^3} \int_{e_1+e_2}^{e_1} \left( z - \left( e_1 + \frac{e_2}{2} \right) \right) \left( \partial u_x\left(\frac{l_f}{2}, y, z, t\right) - \partial u_x\left(-\frac{l_f}{2}, y, z, t\right) \right) dz dy \quad (6.7)$$

Notons que  $\partial N(t)$  et  $\partial Q(t)$  correspondent à une force par unité de largeur, ils peuvent donc être exprimés en  $N/m$ .  $\partial M(t)$  est un moment par unité de largeur qui peut être exprimé en  $N$  et  $\partial \Delta \phi(t)$  a la dimension d'un angle ( $rad$ ).

Les trois grandeurs de référence  $\partial N(t)$ ,  $\partial M(t)$  et  $\partial Q(t)$  représentent trois composantes des éléments de réduction du torseur des efforts sur la section  $S^{c1}$  telle que :

$$S^{c1} = \left\{ x = 0 ; -\frac{l_{ch}}{2} \leq y \leq \frac{l_{ch}}{2} ; 0 \leq z \leq e_1 \right\}$$

$\partial N(t)$  et  $\partial Q(t)$  sont les composantes selon  $x$  et  $z$  respectivement de la force résultante et  $\partial M(t)$  est la composante selon  $y$  du moment résultant.

$\partial \Delta \phi(t)$  est la différence de rotation moyenne entre les sections  $S_f^{c2}$  et  $S_{f+1}^{c2}$  telles que :

$$S_f^{c2} = \left\{ x = -\frac{l_f}{2} ; -\frac{l_{ch}}{2} \leq y \leq \frac{l_{ch}}{2} ; e_1 \leq z \leq e_1 + e_2 \right\}$$

$$S_{f+1}^{c2} = \left\{ x = \frac{l_f}{2} ; -\frac{l_{ch}}{2} \leq y \leq \frac{l_{ch}}{2} ; e_1 \leq z \leq e_1 + e_2 \right\}$$

### 6.1.3 Evolution des fonctions de référence en fonction du temps

Nous venons donc de simplifier le problème complet de l'étude d'une chaussée fissurée à la détermination de quatre fonctions du temps  $t$ . Cette démarche peut être encore poursuivie en recherchant les instants critiques  $t_i$  qui ont lieu lors du déplacement de la charge de part et d'autre de la fissure. La résolution du problème sera alors réduite au calcul de quelques scalaires. Comme

nous nous intéressons aux amplitudes maximales de variation, ces instants correspondent aux configurations pour lesquelles les fonctions définies précédemment atteignent leur valeurs maximales et minimales. Dans ce cadre, nous avons repéré trois positions de charge particulières :

- à  $t_0$ , la charge est très loin de la fissure  $\iff xc_0 \gg e_1 + e_2$  : dans ce cas, la charge est suffisamment loin de la fissure pour que l'état de contrainte de la chaussée aux alentours de la fissure n'en soit pas affecté.
- à  $t_1$ , la charge est centrée sur la fissure  $\iff xc_1 = 0$  : cette position implique la sollicitation de la fissure en mode I uniquement (Fig. 6.3).
- à  $t_2$  le bord de la charge se situe juste au bord de la fissure  $\iff xc_2 = \pm a$  (avec  $2a$  la longueur de la charge dans la direction  $x$ ) : cette configuration a lieu à deux instants (charge à gauche de la fissure, charge à droite de la fissure) mais comme le problème est symétrique, nous n'en considérons qu'un seul. Cette position particulière de la charge provoque un état de contrainte tel que le cisaillement à proximité de la fissure est maximal. Les modes I et II sont activés dans ce cas (Fig. 6.4).

**Instant  $t_0$  : la charge est très loin de la fissure  $\iff xc_0 \gg e_1 + e_2$**

Si la charge est suffisamment loin de la fissure étudiée, elle n'a plus d'influence dans la région à proximité de la fissure. On peut donc considérer que :

$$\partial N(t_0) = 0$$

$$\partial M(t_0) = 0$$

$$\partial Q(t_0) = 0$$

$$\partial \Delta \phi(t_0) = 0$$

**Instant  $t_1$  : la charge est centrée sur la fissure  $\iff xc_1 = 0$**

Dans la littérature, des calculs élastiques ([LCPC, 1988]) ont montré que lorsqu'une chaussée semi-rigide est soumise à une charge de trafic centrée sur la fissure, les contraintes sont telles qu'elles tendent à refermer la fissure. Puisque cette configuration correspond à une sollicitation en flexion, cette observation signifie que la fibre neutre de la structure se trouve en fait située en dessous de l'interface entre les deux couches et que la couche supérieure est en compression sur toute son épaisseur (Fig. 6.3).

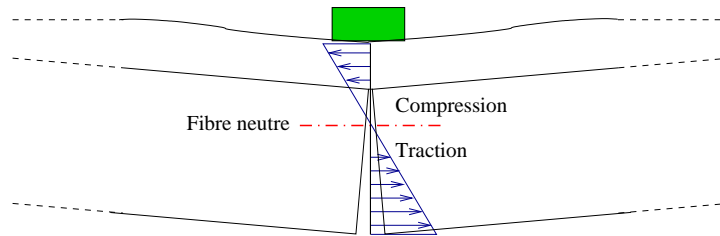


FIGURE 6.3. *Fonctionnement de la chaussée soumise à une charge centrée sur la fissure*

Nous pouvons donc traduire ce commentaire en termes de relations mathématiques sur les grandeurs de référence définies précédemment. Tout d'abord, la structure est sollicitée en flexion et les notations choisies impliquent un moment positif :

$$\partial M(t_1) \geq 0$$

Considérons ensuite la contrainte approchée  $\partial\sigma_{xx}^*(z, t_1)$  définie comme une combinaison linéaire de  $\partial N(t_1)$  et  $\partial M(t_1)$  :

$$\partial\sigma_{xx}^*(z, t_1) = \frac{\partial N(t_1)}{e_1} + \frac{12 \cdot \partial M(t_1)}{e_1^3} \left( z - \frac{e_1}{2} \right)$$

Comme nous avons vu que la couche 1 est en compression sur toute sa hauteur, la fonction  $\partial\sigma_{xx}^*(z, t_1)$  est négative quelque soit la valeur de  $z \in [0 ; e_1]$  et donc plus particulièrement en haut ( $z = 0$ ) et en bas ( $z = e_1$ ) de couche.

$$\partial\sigma_{sup}(t_1) = \partial\sigma_{xx}^*(0, t_1) = \frac{\partial N(t_1)}{e_1} - \frac{6 \cdot \partial M(t_1)}{e_1^2} \leq 0$$

$$\partial\sigma_{inf}(t_1) = \partial\sigma_{xx}^*(e_1, t_1) = \frac{\partial N(t_1)}{e_1} + \frac{6 \cdot \partial M(t_1)}{e_1^2} \leq 0$$

La vérification de ces deux relations et du moment  $\partial M(t_1)$  positif implique :

$$\partial N(t_1) \leq 0$$

Par ailleurs dans cette configuration, l'effort normal et le moment de flexion atteignent leurs valeurs maximales en valeur absolue. On a donc :

$$\partial N(t_1) = \min(\partial N(t))$$

$$\partial M(t_1) = \max(\partial M(t))$$

Enfin, s'agissant des déplacements dans la couche 1, même si les contraintes tendent à refermer la fissure, nous pouvons supposer que l'angle moyen d'ouverture reste positif et qu'il atteint sa valeur maximale en  $xc = xc_1$  ou  $t = t_1$ . Cette hypothèse pourra être vérifiée lors du calcul d'un exemple de chaussée fissurée.

$$\partial\Delta\phi(t_1) \geq 0$$

$$\partial\Delta\phi(t_1) = \max(\partial\Delta\phi(t))$$

**Instant  $t_2$  : le bord de la charge est juste au bord de la fissure  $\iff xc_2 = a$**

Dans cette configuration, les efforts de cisaillement dans la couche supérieure atteignent leur intensité maximale et jouent un rôle primordial (Fig. 6.4). Nous avons donc :

$$\partial Q(t_2) = \max(|\partial Q(t)|)$$

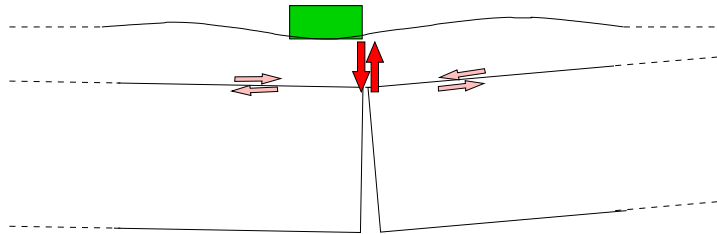


FIGURE 6.4. *Fonctionnement de la chaussée soumise à une charge excentrée*

De plus, les contraintes normales sont telles qu'elles tendent à refermer la fissure, ce qui se traduit par :

$$\partial\sigma_{sup}(t_2) = \frac{\partial N(t_2)}{e_1} - \frac{6 \cdot \partial M(t_2)}{e_1^2} \leq 0$$

$$\partial\sigma_{inf}(t_2) = \frac{\partial N(t_2)}{e_1} + \frac{6.\partial M(t_2)}{e_1^2} \leq 0$$

Par contre, nous pouvons continuer à supposer que l'angle moyen d'ouverture de la fissure reste positif :

$$\partial\Delta\phi(t_2) \geq 0$$

Pour résumer cette analyse, nous avons identifié quatre fonctions représentatives du fonctionnement d'une chaussée semi-rigide fissurée.

- $\partial N(t)$ , la résultante de l'effort normal lorsque le centre de la charge se trouve en  $x = xc(t)$  :

$$\partial N(t) = \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \int_{e_1}^0 \partial\sigma_{xx}(0, y, z, t) dz dy$$

- $\partial Q(t)$ , la résultante de l'effort tranchant lorsque le centre de la charge se trouve en  $x = xc(t)$  :

$$\partial Q(t) = \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \int_{e_1}^0 \partial\sigma_{xz}(0, y, z, t) dz dy$$

- $\partial M(t)$ , le moment de flexion résultant selon  $y$  lorsque le centre de la charge se trouve en  $x = xc(t)$  :

$$\partial M(t) = \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \int_{e_1}^0 \left(z - \frac{e_1}{2}\right) \partial\sigma_{xx}(0, y, z, t) dz dy$$

- $\partial\Delta\phi(t)$ , l'angle moyen d'ouverture de la fissure lorsque le centre de la charge se trouve en  $x = xc(t)$  :

$$\partial\Delta\phi(t) = \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \frac{12}{e_2^3} \int_{e_1+e_2}^{e_1} \left(z - \left(e_1 + \frac{e_2}{2}\right)\right) \left(\partial u_x\left(\frac{l_f}{2}, y, z, t\right) - \partial u_x\left(-\frac{l_f}{2}, y, z, t\right)\right) dz dy$$

Après avoir analysé le comportement de la structure aux trois instants critiques sélectionnés  $t_0$ ,  $t_1$  et  $t_2$ , nous pouvons définir les amplitudes de variations des quatre fonctions de référence (Tab. 6.1).

Fonction $F(t)$	Minimum $\min(F(t))$	Maximum $\max(F(t))$	Amplitude $\Delta F(t)$
$\partial N(t)$	$\partial N(t_1)$	0	$-\partial N(t_1)$
$\partial Q(t)$	$-\partial Q(t_2)$	$\partial Q(t_2)$	$2.\partial Q(t_2)$
$\partial M(t)$	0	$\partial M(t_1)$	$\partial M(t_1)$
$\partial\Delta\phi(t)$	0	$\partial\Delta\phi(t_1)$	$\partial\Delta\phi(t_1)$

TAB. 6.1. Valeurs limites et amplitude de variation des fonctions de référence

Nous avons également considéré deux combinaisons linéaires de deux de ces grandeurs :

- $\partial\sigma_{sup}(t)$ , la contrainte approchée en haut de la couche supérieure, lorsque le centre de la charge se trouve en  $x = xc(t)$  :

$$\partial\sigma_{sup}(t) = \frac{\partial N(t)}{e_1} - \frac{6.\partial M(t)}{e_1^2}$$

- $\partial\sigma_{inf}(t)$ , la contrainte équivalente en bas de la couche supérieure, lorsque le centre de la charge se trouve en  $x = xc(t)$  :

$$\partial\sigma_{inf}(t) = \frac{\partial N(t)}{e_1} + \frac{6.\partial M(t)}{e_1^2}$$

et nous avons remarqué que le fonctionnement de la chaussée fissurée dans le problème auxiliaire était caractérisé par les deux relations suivantes :

$$\partial\sigma_{sup}(t) \leq 0 \quad \forall t \quad (6.8)$$

$$\partial\sigma_{inf}(t) \leq 0 \quad \forall t \quad (6.9)$$

Finalement, nous pouvons déduire les fonctions du problème complet en appliquant les équations (6.3) aux fonctions de référence du problème auxiliaire définies dans cette section :

$$N(t) = \partial N(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \partial N(t) dt$$

$$Q(t) = \partial Q(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \partial Q(t) dt$$

$$M(t) = \partial M(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \partial M(t) dt$$

$$\Delta\phi(t) = \partial\Delta\phi(t)$$

ainsi qu'aux deux combinaisons linéaires :

$$\sigma_{sup}(t) = \partial\sigma_{sup}(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \partial\sigma_{sup}(t) dt$$

$$\sigma_{inf}(t) = \partial\sigma_{inf}(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \partial\sigma_{inf}(t) dt$$

## 6.2 Analyse d'une chaussée fissurée à partir d'une modélisation multicouche

Cette section a pour objectif de confirmer l'analyse qualitative réalisée dans la section précédente et de quantifier les grandeurs définies. Pour cela, nous proposons d'effectuer une modélisation d'un exemple de structure de chaussée et d'en tirer les informations requises.

### 6.2.1 Présentation de la structure étudiée

Considérons une chaussée de type chaussée à assise traitée aux liants hydrauliques, mise en place sur une plate-forme support de classe de portance à long terme PF2 et subissant un trafic T1. Un trafic T1 est un trafic assez fort qui correspond à une moyenne journalière annuelle d'environ 500 poids lourds.



### 6.2.1.1 Structure de chaussée

La structure étudiée est constituée d'une couche traitée aux liants hydrauliques et recouverte d'une couche en matériaux bitumineux. Elle est définie dans l'espace  $(Oxyz)$ .

Nous avons vu dans la première partie (3.3.2) qu'un prédimensionnement de ce type de structure peut être réalisé en considérant une épaisseur de  $8\text{cm}$  pour la couche bitumineuse de roulement lorsque le trafic est de type T1.

En ce qui concerne les assises, nous savons qu'elles ont en général une épaisseur comprise entre  $20$  et  $50\text{cm}$  et que les contraintes technologiques sont telles que si elles sont construites en une seule couche, leur épaisseur maximale est de  $35\text{cm}$ . Etant données ces deux remarques, et pour des raisons de simplicité, nous avons choisi de considérer une seule couche de grave traitée ayant une épaisseur de  $30\text{cm}$ .

Nous considérons une fissure transversale de  $5\text{mm}$  de largeur traversant la couche de matériaux traités aux liants hydrauliques. Cette largeur correspond à l'ouverture d'une fissure dans un béton de chaussée (coefficient de dilatation  $\alpha = 2.10^{-5}^\circ\text{C}^{-1}$ ), avec un espacement entre fissures de  $10\text{m}$  et pour une variation de température de  $25^\circ\text{C}$ . On choisit de définir la direction de circulation (ou direction longitudinale) suivant l'axe  $(Ox)$ . La fissure admet alors comme plan de symétrie le plan  $(Oyz)$ .

### 6.2.1.2 Matériaux

En général, lors d'un dimensionnement de chaussée, les caractéristiques des matériaux sont choisies de manière à vérifier les prescriptions du guide de dimensionnement [LCPC-SETRA, 1994]. Toutefois, l'analyse des résultats de cette modélisation doit restée utile pour le dimensionnement du nouvel essai proposé. C'est pourquoi nous devons aussi tenir compte des contraintes techniques intervenant dans la réalisation des éprouvettes.

Finalement, tout en nous affranchissant des contraintes de réglementation, nous proposons de définir des caractéristiques de matériaux, qui sont compatibles avec la fabrication des éprouvettes, mais qui restent proches de celles préconisées. Ainsi, même si la chaussée définie ne répond pas à toutes les exigences du dimensionnement d'une chaussée, elle peut être représentative du comportement d'une chaussée semi-rigide et c'est ce type de structure qui sera testé sur le bâti SIFIRE.

#### Le sol support

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, la grande rigidité des chaussées semi-rigides permet de ne transmettre que des efforts verticaux très faibles au sol-support. La rigidité de cette couche ne représente donc pas un facteur limitant lors de la conception des éprouvettes. Aussi, nous pouvons nous soumettre à ce que préconise le règlement pour un sol de classe de portance à long terme PF2.

Il recommande d'effectuer le calcul de chaussée en assimilant la plate-forme à un demi-espace homogène auquel est affecté le module d'Young correspondant à la limite basse de la classe de portance. Ainsi dans le cas d'une classe PF2, nous affecterons un module de  $50\text{MPa}$  à la couche de sol, le coefficient de Poisson étant pris égal à  $0.35$ .

#### La couche d'assise

Une chaussée semi-rigide est caractérisée par une couche d'assise en matériaux traités aux liants hydrauliques. Le guide technique [LCPC-SETRA, 1994] affecte aux graves traitées un coefficient de Poisson de  $0.25$  et un module d'Young variant entre  $15$  et  $30\text{GPa}$  selon la nature de la grave (grave-ciment, grave-laitier, grave-cendres volantes, ...). Dans notre cas, le choix de la raideur de

la couche d'assise (Couche 2) est basé sur le matériau utilisé dans l'éprouvette pour simuler la couche d'assise. C'est un béton ordinaire qui sera fabriqué en centrale. On peut donc considérer que sa résistance en compression finale sera de 16MPa environ. En utilisant la formule (6.10) des Règles BAEL 91 donnant la valeur du module  $E$  en fonction de la résistance en compression  $f_c$ , nous obtenons un module de 27.7GPa.

$$E = 11000f_c^{1/3} \quad (6.10)$$

### La couche de roulement

La couche de surface (Couche 1) d'une chaussée à assises traitées aux liants hydrauliques est une couche bitumineuse. L'enrobé bitumineux choisi est un béton bitumineux de type Béton Bitumineux Clouté (BBC). Seule la matrice de granulométrie comprise entre 0 et 6mm (Tab. 6.2) est utilisée, le cloutage en granulat 10/14 n'étant pas nécessaire pour notre application. Le liant utilisé est un bitume pur de pénétrabilité 35/50 dosé de manière à obtenir une teneur en liant de 6.85 ppc.

tamis [mm]	0.08	0.315	1	2	4	6.3	8
% passant	11.8	22.6	39.0	59.5	70.2	97.0	100

TABLEAU 6.2. Composition granulométrique du BB0/6

Ce matériau a été retenu pour la composition des éprouvettes non seulement parce qu'il a fait l'objet de nombreux travaux de recherche ([De La Roche, 1996], [Bodin, 2002]) mais aussi parce que la taille maximale du grain est assez petite et devrait permettre de limiter la dispersion des résultats.

Comme le mentionne le guide de dimensionnement des chaussées françaises, le coefficient de Poisson des matériaux bitumineux est généralement pris égal à 0.35. Par ailleurs, le comportement viscoélastique de ce matériau amène à s'intéresser davantage à son module complexe  $E^*$  qu'à son module d'élasticité classique. La grandeur  $E^*$  peut être mesurée en flexion 2 points sur éprouvette trapézoïdale (voir paragraphe 5.1.1.1). Pour une température de 10°C (température d'essai) et une fréquence de 10Hz, la valeur du module de rigidité mesurée par [De La Roche, 1996] et [Bodin, 2002]) est de 11.9GPa.

Les caractéristiques mécaniques et géométriques des trois couches de matériaux considérées sont donc définies et rassemblées dans le Tab. 6.3.

Matériau	Epaisseur (m)	Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson
Béton bitumineux	0.08	11.9	0.35
Grave ciment	0.30	27.7	0.25
Sol	semi-infini	0.05	0.35

TABLEAU 6.3. Caractéristiques des couches de la structure de chaussée considérée

#### 6.2.1.3 Chargement de trafic

Selon la norme française, la charge de référence sollicitant la chaussée est un demi-essieu de 13 tonnes à roues jumelées, c'est-à-dire deux disques de 0.125m de rayon, qui transmettent une pression de 0.662MPa (paragraphe 3.3.2).

En réalité, des campagnes expérimentales, menées sur différents types de pneus, ont montré que cette charge ne s'applique pas sur un disque, mais plutôt sur un rectangle ([De Beer et al., 1997]) de longueur  $0.30m$  et de largeur  $0.22m$ . Aussi, le chargement que nous considérons dans la suite est une pression uniforme de  $1MPa$  distribuée sur une surface rectangulaire de  $0.30m$  de longueur (sens longitudinal ou sens de circulation) et de  $0.22m$  de largeur (sens transversal). La résultante de cette effort est ainsi équivalente à celle créée par l'application d'un demi-essieu de 13 tonnes.

De plus, nous allons considérer que la charge se déplace à une vitesse constante  $v = 72km/h = 20m/s$ . Ainsi, si on suppose qu'à  $t = 0$  la charge se trouve en  $x_0 = -0.5m$ , la relation entre la variable de temps  $t$  et la variable de position de la charge  $xc$  s'expriment de la façon suivante :

$$xc = x_0 + v.t = -0.5 + 20.t$$

Nous pouvons alors calculer que la charge se trouve en  $xc = xc_1 = 0$  à  $t = t_1 = 0.025s$ , en  $xc = xc_2^- = -a = -0.15m$  à  $t = t_2^- = 0.0175s$  et en  $xc = xc_2^+ = a = 0.15m$  à  $t = t_2^+ = 0.0325s$ .

### 6.2.2 Présentation du modèle utilisé

La structure de chaussée définie dans les paragraphes précédents peut être modélisée par n'importe quel outil permettant de considérer un multicouche de chaussée avec une fissure.

Nous proposons d'utiliser le modèle de [Tran, 2004] qui a l'avantage non seulement d'être plus rapide que les calculs par éléments finis tridimensionnels mais aussi de fournir les résultats directement en termes d'efforts et de déplacements moyens par couche.

La construction du modèle de [Tran, 2004] a été motivée par le besoin d'un logiciel simple de bureau d'études, capable de prendre en compte non seulement la structure multicouche d'une chaussée mais aussi la présence de défauts tels que des fissures.

Pour les couches qui constituent la chaussée, c'est un modèle de type  $M_4-5n$  qui est utilisé. Les Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches ( $M_4$ ) sont construits à partir de la formulation de Hellinger-Reissner et de champs de contrainte tridimensionnels approchés, polynomiaux en  $z$  (variable de l'axe perpendiculaire au plan des couches) par couche ([Chabot, 1997] et [Chabot et Ehrlicher, 1998]). Le modèle  $M_4-5n$  fait partie de ces modèles et a la particularité de présenter une cinématique à  $5n$  variables pour une structure comprenant  $n$  couches.

La plate-forme support de la chaussée est calculée grâce à la solution analytique de Boussinesq (1885) pour une force appliquée à un massif élastique semi-infini. Les champs de déplacement et de contrainte qui en résultent sont ensuite reliés à ceux issus du modèle  $M_4-5n$  (Fig. 6.5). La résolution du système est effectuée de façon numérique avec le logiciel Matlab.

Ainsi cette modélisation multicouche de la chaussée sur un sol semi-infini, appelée M4-B, permet d'étudier la présence de couches fissurées et de rendre finies les valeurs des contraintes près des bords ou fissures.

En ce qui concerne le comportement des matériaux, il est théoriquement possible de considérer des comportements anélastiques de type viscoélasticité dans le modèle M4-5n et de décrire ainsi l'évolution des déformations anélastiques généralisées. Toutefois dans l'état actuel du développement de ce modèle, cet option ne peut pas encore être mise en oeuvre. Aussi, la chaussée est modélisée ici de façon simplifiée en considérant uniquement son comportement élastique. Cette hypothèse n'induit cependant pas une erreur importante si l'on considère les caractéristiques élastiques équivalentes des matériaux bitumineux pour une fréquence et une température données.

Sa validation en élasticité ([Tran, 2004]), a été effectuée par comparaison avec les résultats obtenus par un calcul aux éléments finis tridimensionnels avec le logiciel CESAR du LCPC. Les éléments de référence utilisés pour la vérification sont : les contraintes normales et de cisaillement

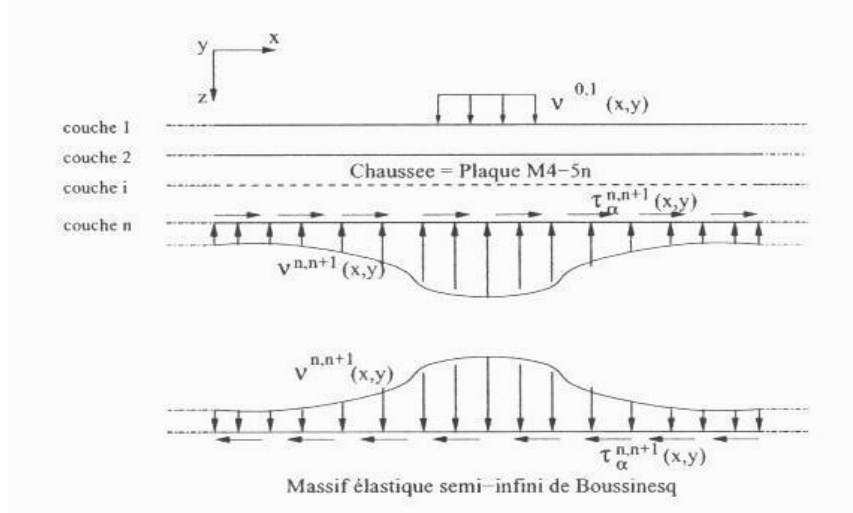


FIGURE 6.5. Schéma de calcul du multicouche tridimensionnel [Tran, 2004]

à l'interface de deux couches de chaussée et à l'interface chaussée-sol, et les déplacements verticaux et transverses au niveau de ces mêmes interfaces. Cette analyse conduit à la conclusion que les résultats du modèle M4-B sont cohérents avec ceux des éléments finis dans le cas d'une chaussée non fissurée ainsi que dans celui d'une chaussée fissurée. Notons le gain important de temps de calcul : par exemple dans le cas d'un bicouche fissuré transversalement dans la couche inférieure, le calcul par éléments finis d'un quart de la structure (2 heures) est 8 fois plus long que le calcul par le modèle M4-B de la structure totale (15 minutes).

On considère la structure de chaussée comme infinie dans le plan ( $Oxy$ ). Pour appliquer le modèle de calcul que nous avons choisi, il est nécessaire de définir les limites dans les directions ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ) de la structure étudiée. Nous considérerons donc un bloc de  $10m \times 10m$  dans le plan ( $Oxy$ ), la distance de  $10m$  correspondant à l'espacement moyen entre deux fissures.

Sur les frontières ( $x = \pm 5m$  et  $y = \pm 5m$ ), les champs de déplacements normaux sont imposés nuls. La taille de la structure est suffisamment importante pour que les conditions limites imposées sur les frontières ne soient quasiment plus ressenties dans la zone de chargement au centre de la structure et proche de la fissure.

Finalement, la structure que nous avons choisi de modéliser est maintenant complètement définie. Le schéma Fig. 6.6 reprend la plupart de ses caractéristiques.

### 6.2.3 Résultats quantitatifs

#### 6.2.3.1 Résultats directs de la modélisation

Après avoir appliqué ce modèle à la structure étudiée, la solution est exprimée en termes d'efforts intérieurs généralisés et de déplacements généralisés.

On appelle  $\bar{h}_i$  et  $e_i$  respectivement la côte moyenne et l'épaisseur de la couche  $i$ .  $h_i^+$  et  $h_i^-$  sont les côtes limites de la couche  $i$  tels que :

$$\begin{cases} \bar{h}_i = \frac{h_i^+ + h_i^-}{2} \\ e_i = h_i^+ - h_i^- \end{cases}$$

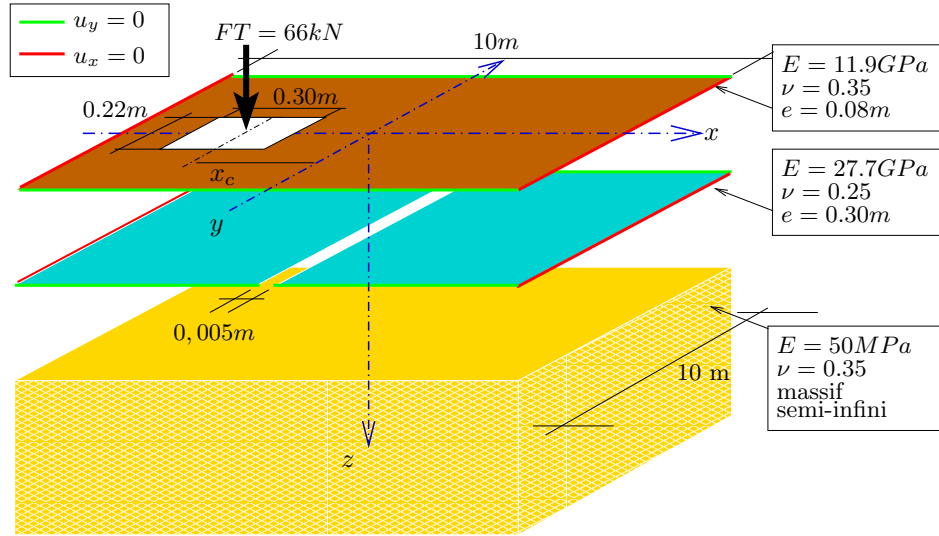


FIGURE 6.6. Structure de chaussée étudiée

Pour chaque position de charge  $xc(t)$ , les efforts intérieurs généralisés et les déplacements généralisés sont alors définis de la façon suivante ( $i = 1, 2$ ,  $j = 0, 1, 2$  et  $(\alpha, \beta) \in \{x; y\}$ ) :

- le tenseur plan  $\partial N_{\alpha\beta}^i(x, y, t)$  d'ordre 2 des efforts membranaires de la couche  $i$

$$\partial N_{\alpha\beta}^i(x, y, t) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \partial \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z, t) dz$$

- le tenseur plan  $\partial M_{\alpha\beta}^i(x, y, t)$  d'ordre 2 des moments de flexion de la couche  $i$  par rapport au plan médian de la couche

$$\partial M_{\alpha\beta}^i(x, y, t) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \bar{h}_i) \cdot \partial \sigma_{\alpha\beta}(x, y, z, t) dz$$

- le vecteur plan  $\partial Q_{\alpha}^i(x, y, t)$  d'effort tranchant de la couche  $i$

$$\partial Q_{\alpha}^i(x, y, t) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \partial \sigma_{\alpha z}(x, y, z, t) dz$$

- le vecteur plan  $\partial \tau_{\alpha}^{j,j+1}(x, y, t)$  d'effort intérieur de cisaillement à l'interface  $j, j + 1$

$$\partial \tau_{\alpha}^{j,j+1}(x, y, t) = \partial \sigma_{\alpha z}(x, y, h_j^+, t) = \partial \sigma_{\alpha z}(x, y, h_{j+1}^-, t)$$

- le scalaire  $\partial \nu^{j,j+1}(x, y, t)$  d'effort d'arrachement à l'interface  $j, j + 1$

$$\partial \nu^{j,j+1}(x, y, t) = \partial \sigma_{zz}(x, y, h_j^+, t) = \partial \sigma_{zz}(x, y, h_{j+1}^-, t)$$

- les déplacements membranaires moyens  $\partial U_{\alpha}^i(x, y, t)$  de la couche  $i$

$$\partial U_{\alpha}^i(x, y, t) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{e_i} \cdot \partial u_{\alpha}(x, y, z, t) dz$$

- les rotations moyennes  $\partial \phi_{\alpha}^i(x, y, t)$  de la couche  $i$

$$\partial \phi_{\alpha}^i(x, y, t) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12(z - \bar{h}_i)}{e_i^3} \cdot \partial u_{\alpha}(x, y, z, t) dz$$

- le déplacement vertical moyen  $\partial U_z^i(x, y, t)$  de la couche  $i$

$$\partial U_z^i(x, y, xc) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{1}{e_i} \cdot \partial u_z(x, y, z, t) dz$$

La modélisation qui a été appliquée au problème étudié passe par une résolution numérique d'un système et donc par une discrétisation de l'espace. Nous connaissons donc les champs solutions uniquement par leurs valeurs aux noeuds. La figure Fig. 6.7 représente un échantillon de la discrétisation dans le plan  $(Oxy)$  au voisinage de  $O$ , le centre du maillage.

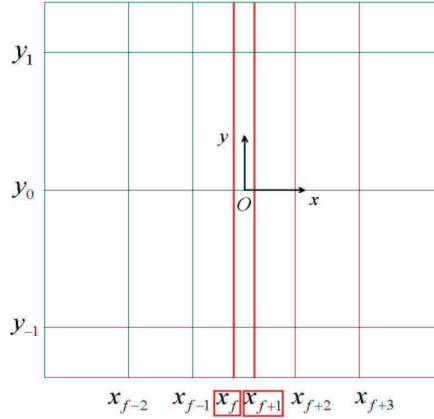


FIGURE 6.7. Extrait de la discrétisation du plan  $(Oxy)$

Cette discrétisation est plus fine au voisinage de la fissure dans la direction  $x$  afin de saisir les variations plus importantes des champs dans cette région. Nous notons  $x_f$  et  $x_{f+1}$  les abscisses des points les plus proches de la fissure. Ces deux abscisses sont telles que  $x_f = -\frac{l_f}{2}$  et  $x_{f+1} = \frac{l_f}{2}$ . Les deux droites rouges en trait plus épais sur la figure Fig. 6.7 délimitent donc la fissure dans la direction  $x$ . De façon plus générale, nous notons  $x_{f+i}$  la  $i^{eme}$  abscisse à droite de la fissure ( $x \geq 0$ ) et  $x_{f-i-1}$  la  $i^{eme}$  abscisse à gauche de la fissure ( $x \leq 0$ ). Dans la direction  $y$ , la discrétisation est notée  $y_j$  avec  $j$  positif pour les  $y$  positifs et  $j$  négatif pour les  $y$  négatifs.

### 6.2.3.2 Calcul des grandeurs de référence

Dans la section 6.1, nous avons défini quatre fonctions de référence, qu'il s'agit ici de déterminer numériquement pour le cas particulier traité. Elles s'expriment en fonction des variables du modèle de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \partial N(t) &= \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \partial N_{xx}^1(0, y, t) dy \\ \partial Q(t) &= \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \partial Q_x^1(0, y, t) dy \\ \partial M(t) &= \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \partial M_{xx}^1(0, y, t) dy \\ \partial \Delta \phi(t) &= \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \left( \partial \phi_x^2\left(\frac{l_f}{2}, y, t\right) - \partial \phi_x^2\left(-\frac{l_f}{2}, y, t\right) \right) dy \end{aligned}$$

D'une part, ces définitions ont été déterminées en considérant que les valeurs des champs les plus intéressantes étaient celles pour lesquelles  $x = 0$  dans la couche 1 et  $x = \pm \frac{l_f}{2}$  dans la couche 2. Dans ce dernier cas, la discrétisation effectuée permet d'obtenir directement la valeur des champs en  $x = \pm \frac{l_f}{2}$  puisque  $x_f = -\frac{l_f}{2}$  et  $x_{f+1} = \frac{l_f}{2}$ . Par contre dans la couche 1, les champs ne sont pas directement calculés en  $x = 0$ . Il est donc nécessaire de déterminer des valeurs équivalentes et cohérentes des champs en ces points en fonction des valeurs calculées au niveau des noeuds voisins.

Pour cela, nous proposons d'étudier l'évolution des champs concernés, c'est-à-dire  $\partial N_{xx}^1(x, y, t)dy$ ,  $\partial M_{xx}^1(x, y, t)dy$  et  $\partial Q_x^1(x, y, t)dy$ , en fonction de  $x$  pour  $y = 0$ . Par souci de simplicité, nous considérons un seul cas de charge pour chaque variable : charge centrée  $t = t_1$  (ou  $xc = xc_1 = 0$ ) pour  $\partial N_{xx}^1$ ,  $\partial M_{xx}^1$ , et charge juste au bord de la fissure  $t = t_2^-$  (ou  $xc = xc_2^- = -a$ ) pour  $\partial Q_x^1$  puisque cette variable est nulle dans le cas de la charge centrée.

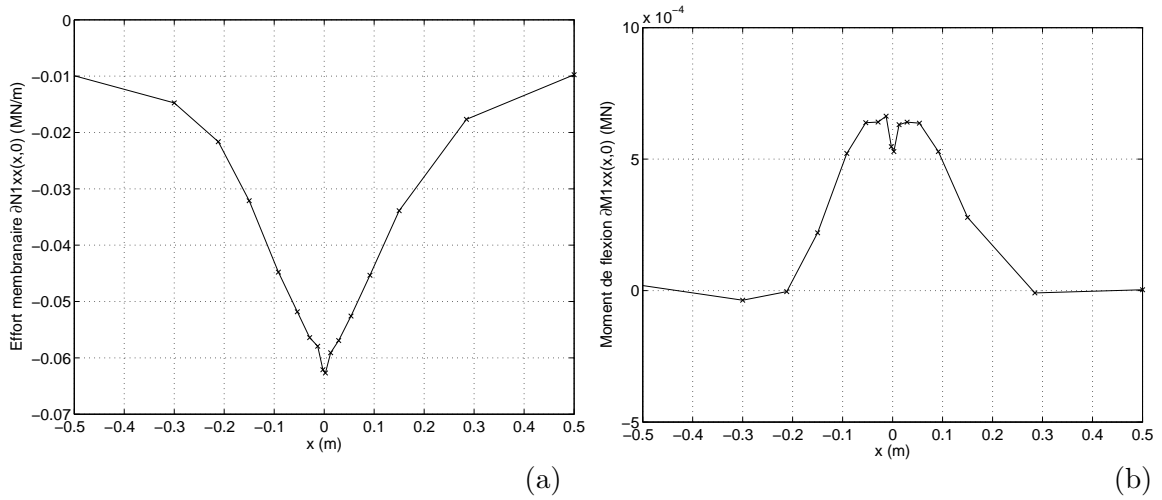


FIGURE 6.8. Variations en fonction de  $x$ , en  $y = 0$ , pour  $t = t_1$  (a) de l'effort membranaire  $\partial N_{xx}^1$ , (b) du moment de flexion  $\partial M_{xx}^1$

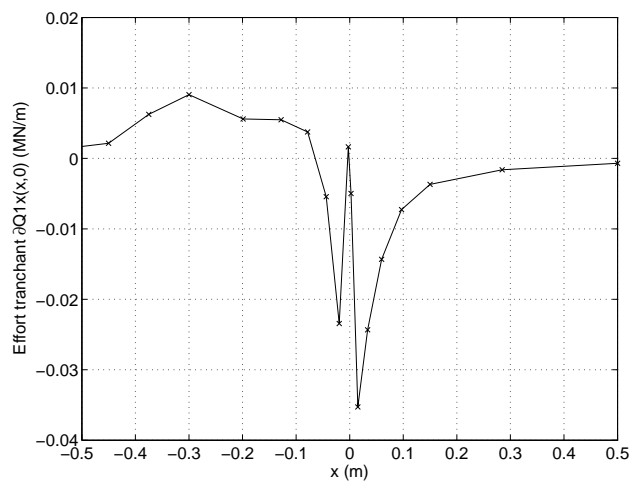


FIGURE 6.9. Variations en fonction de  $x$ , en  $y = 0$ , pour  $t = t_2^-$  de l'effort tranchant  $\partial Q_x^1$

Les figures Fig. 6.8 et Fig. 6.9 présentent l'évolution des trois fonctions de référence en fonction de  $x$  dans l'intervalle  $[-0.5m, 0.5m]$  afin de mieux visualiser la continuité de ces fonctions en  $x = 0$ . Nous observons sur la Fig. 6.8(a) que l'effort normal  $\partial N_{xx}^1(x, 0, t)$  est bien continu au passage de

la fissure. Il est donc cohérent de travailler sur la fonction moyenne

$$\partial \bar{N}_{xx}^1(0, y, t) = \frac{1}{2} (\partial N_{xx}^1(x_f, y, t) + \partial N_{xx}^1(x_{f+1}, y, t)) \quad (6.11)$$

Par contre, s'agissant de  $\partial M_{xx}^1(x, 0, t)$ , respectivement  $\partial Q_{xx}^1(x, 0, t)$ , la figure Fig. 6.8(b), respectivement Fig. 6.9, fait apparaître clairement une discontinuité au passage de la fissure. Les valeurs de la fonction  $\partial M_{xx}^1(x, 0, t)$ , respectivement  $\partial Q_{xx}^1(x, 0, t)$ , en  $x = x_f$  et en  $x = x_{f+1}$  ne sont pas représentatives de la flexion, respectivement l'effort tranchant, dans la couche au voisinage de la fissure. Remarquons que la contrainte d'arrachement  $\partial \nu^{2,3}(x, y, t)$  à l'interface de la couche de sol et de la couche 2 fissurée tend vers l'infini quand on s'approche de la fissure. Dans le modèle, cette valeur est donc sousestimée et par le jeu des équations d'équilibre, elle induit une erreur sur les champs  $\partial M_{xx}^1(x, y, t)$  et  $\partial Q_{xx}^1(x, y, t)$  au voisinage de la fissure, qui pourrait expliquer ces discontinuités.

Nous proposons alors de retenir une extrapolation  $\partial \bar{M}_{xx}^1(0, y, t)$ , respectivement  $\partial \bar{Q}_{xx}^1(0, y, t)$ , définie de la façon suivante :

$$\partial \bar{M}_{xx}^1(0, y, t) = \frac{1}{2} (\partial \tilde{M}_{xx}^1(x_f, y, t) + \partial \tilde{M}_{xx}^1(x_{f+1}, y, t)) \quad (6.12)$$

respectivement,

$$\partial \bar{Q}_x^1(0, y, t) = \frac{1}{2} (\partial \tilde{Q}_x^1(x_f, y, t) + \partial \tilde{Q}_x^1(x_{f+1}, y, t)) \quad (6.13)$$

avec

$$\partial \tilde{M}_{xx}^1(x_f, y, t) = \partial M_{xx}^1(x_{f-1}, y, t) + \frac{x_f - x_{f-1}}{x_{f-1} - x_{f-2}} (\partial M_{xx}^1(x_{f-1}, y, t) - \partial M_{xx}^1(x_{f-2}, y, t))$$

$$\partial \tilde{M}_{xx}^1(x_{f+1}, y, t) = \partial M_{xx}^1(x_{f+2}, y, t) + \frac{x_{f+1} - x_{f+2}}{x_{f+2} - x_{f+3}} (\partial M_{xx}^1(x_{f+2}, y, t) - \partial M_{xx}^1(x_{f+3}, y, t))$$

respectivement,

$$\partial \tilde{Q}_x^1(x_f, y, t) = \partial Q_x^1(x_{f-1}, y, t) + \frac{x_f - x_{f-1}}{x_{f-1} - x_{f-2}} (\partial Q_x^1(x_{f-1}, y, t) - \partial Q_x^1(x_{f-2}, y, t))$$

$$\partial \tilde{Q}_x^1(x_{f+1}, y, t) = \partial Q_x^1(x_{f+2}, y, t) + \frac{x_{f+1} - x_{f+2}}{x_{f+2} - x_{f+3}} (\partial Q_x^1(x_{f+2}, y, t) - \partial Q_x^1(x_{f+3}, y, t))$$

D'autre part, la définition des fonctions de référence fait intervenir une moyenne dans la direction  $y$  sur la largeur de la charge  $l_{ch}$ . Il est donc intéressant de vérifier numériquement que ce choix permet d'obtenir une bonne approximation des valeurs maximales et minimales des fonctions.

Les figures Fig. 6.10 et Fig. 6.11 présentent l'évolution des fonctions  $\partial \bar{N}_{xx}^1(0, y, t_1)$ ,  $\partial \bar{M}_{xx}^1(0, y, t_1)$ ,  $\partial \phi_x^2(x_{f+1}, y, t_1) - \partial \phi_x^2(x_f, y, t_1)$  pour  $t = t_1$  et  $\partial \bar{Q}_x^1(0, y, t_2^-)$  pour  $t = t_2^-$ , en  $x = 0$ , ainsi que la valeur moyenne correspondante sur l'intervalle  $[-\frac{l_{ch}}{2}, \frac{l_{ch}}{2}]$ . Les valeurs moyennes sont calculées par intégration numérique en chaque point de discrétisation. Nous observons qu'elles sont tout à fait représentatives de la valeur maximale en valeur absolue atteinte. Le choix de cet intervalle était donc bien justifié.

Finalement les cinq grandeurs de référence sont définies en fonction des variables du modèle de la façon suivante :

$$\partial N(t) = \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \partial \bar{N}_{xx}^1(0, y, t) dy \quad (6.14)$$



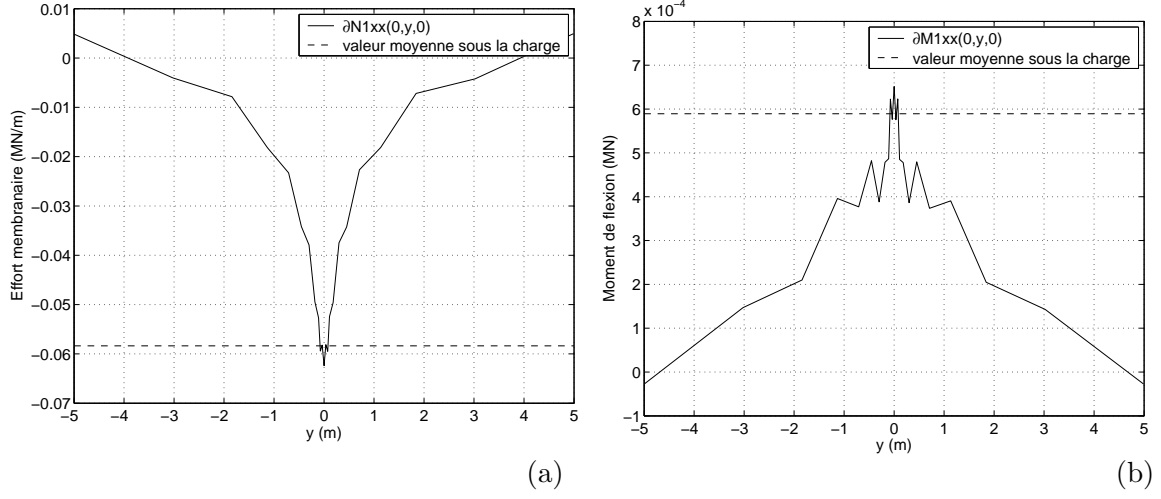


FIGURE 6.10. Variations en fonction de  $y$ , en  $x = 0$ , pour  $t = t_1$  (a) de l'effort membranaire  $\partial \bar{N}_{xx}^1$ , (b) du moment de flexion  $\partial \bar{M}_{xx}^1$

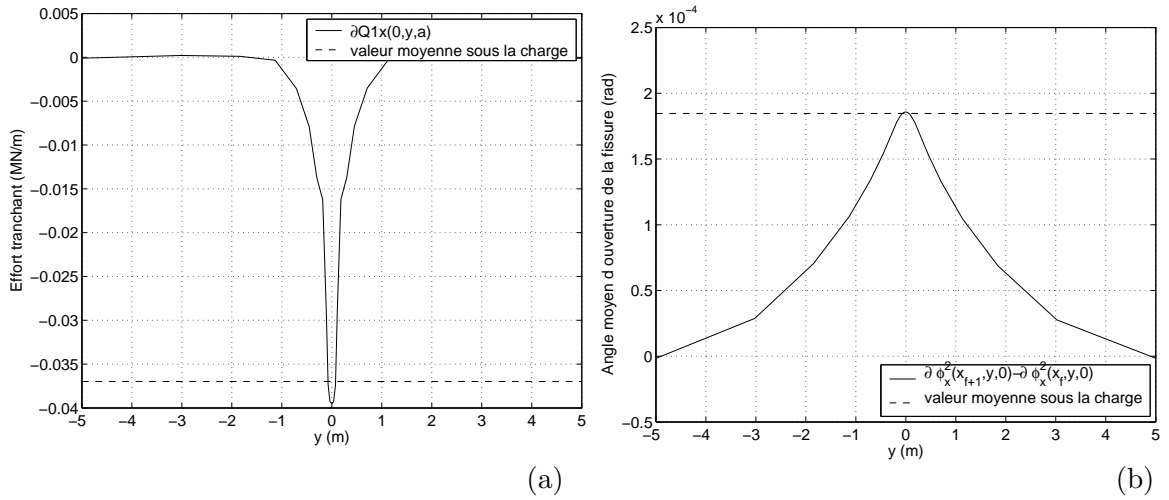


FIGURE 6.11. Variations en fonction de  $y$ , en  $x = 0$ , (a) de l'effort tranchant  $\partial \bar{Q}_x^1$  pour  $t = t_2^-$ , (b) de l'angle moyen d'ouverture de la fissure  $\partial \phi_x^2(x_{f+1}) - \partial \phi_x^2(x_f)$  pour  $t = t_1$

$$\partial Q(t) = \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \partial \bar{Q}_x^1(0, y, t) dy \quad (6.15)$$

$$\partial M(t) = \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \partial \bar{M}_{xx}^1(0, y, t) dy \quad (6.16)$$

$$\partial \Delta \phi(t) = \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} (\partial \phi_x^2(x_{f+1}, y, t) - \partial \phi_x^2(x_f, y, t)) dy \quad (6.17)$$

avec  $\partial \bar{N}_{xx}^1(0, y, t)$ , respectivement  $\partial \bar{M}_{xx}^1(0, y, t)$ ,  $\partial \bar{Q}_x^1(0, y, t)$  définis en (6.11), respectivement (6.12), (6.13).

Les contraintes approchées en haut et en bas de couche sont aisément calculées en effectuant les combinaisons linéaires suivantes :

$$\partial \sigma_{sup}(t) = \frac{\partial N(t)}{e_1} - \frac{6 \partial M(t)}{e_1^2} \quad (6.18)$$

$$\partial \sigma_{inf}(t) = \frac{\partial N(t)}{e_1} + \frac{6 \partial M(t)}{e_1^2} \quad (6.19)$$

Nous pouvons alors représenter ces grandeurs en fonction du temps  $t$ . Les figures Fig. 6.12- Fig. 6.16 présentent l'évolution de ces fonctions pour  $t$  compris dans l'intervalle  $[0.008s, 0.042s]$ . Les calculs n'ont pas été réalisés pour des valeurs de  $xc$  très grandes par rapport à la taille de la structure parce qu'il semble évident qu'il existe une valeur limite de  $xc$  à partir de laquelle l'effet de la charge n'est plus ressenti au niveau de la fissure.

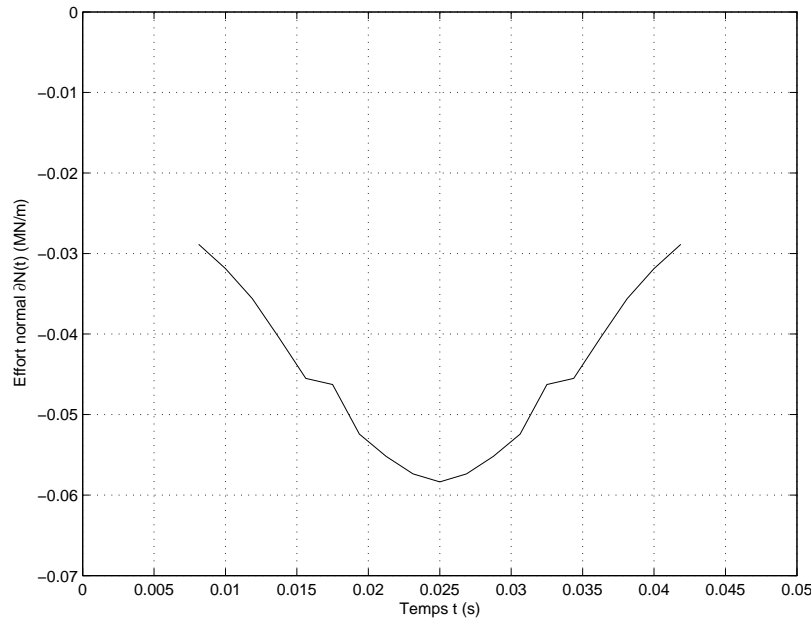


FIGURE 6.12. Effort normal  $\partial N(t)$  en fonction du temps  $t$

Comme nous l'avons vu dans la section 6.1, l'effort normal  $\partial N(t)$  est négatif quelque soit la position de la charge  $t$  (Fig. 6.12). Sa valeur minimale est atteinte pour  $t = t_1 = 0.025s$  et est égale à  $-58.4kN/m$ . La variation de cette fonction au cours d'un cycle est donc égale à  $\Delta(\partial N(t)) = 58.4kN/m$ .

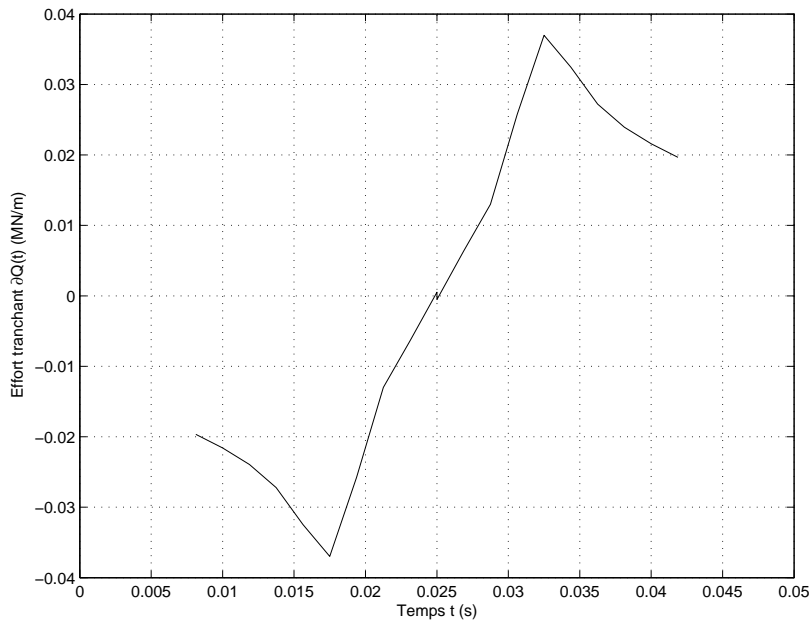


FIGURE 6.13. Effort tranchant  $\partial Q(t)$  en fonction du temps  $t$

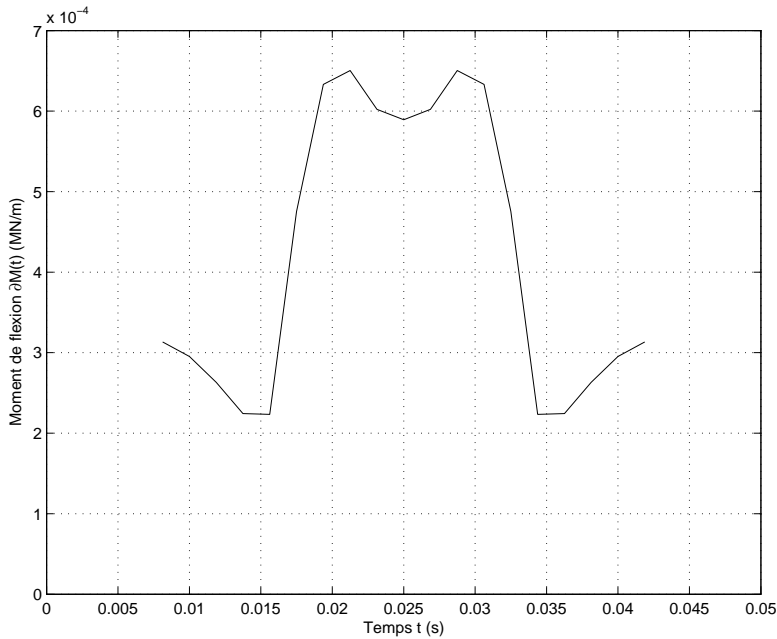


FIGURE 6.14. Moment de flexion  $\partial M(t)$  en fonction du temps  $t$

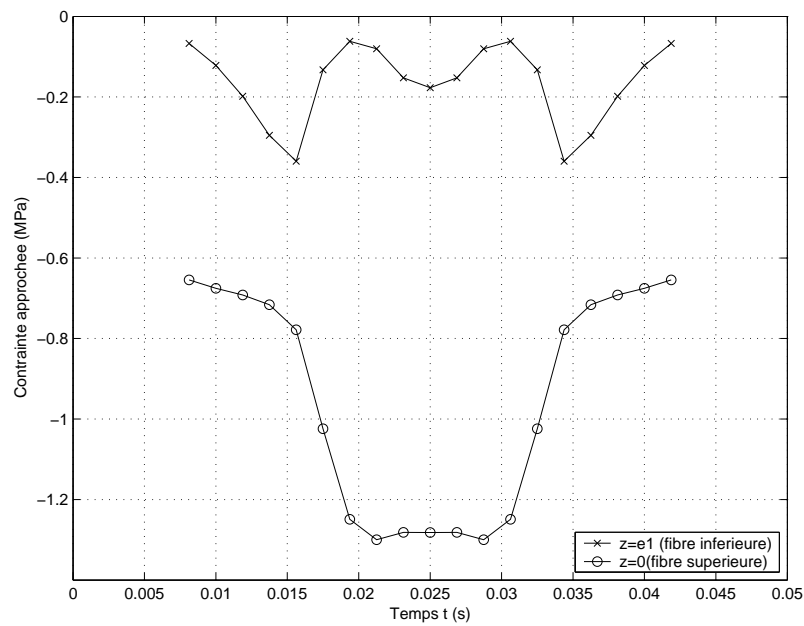


FIGURE 6.15. Contrainte en bas et en haut de la couche bitumineuse en fonction du temps  $t$

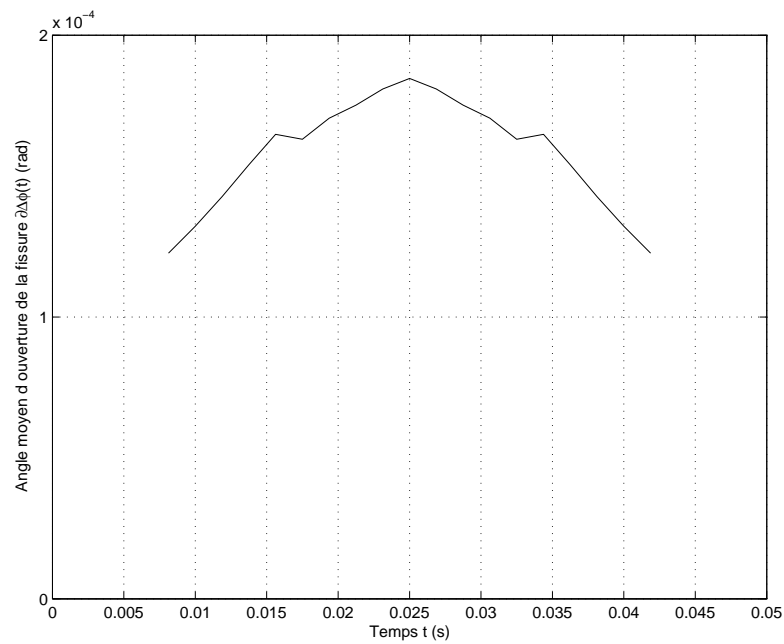


FIGURE 6.16. Angle moyen d'ouverture de la fissure  $\partial\Delta\phi(t)$  en fonction du temps  $t$

La variation de l'effort tranchant  $\partial Q(t)$  en fonction de la position de la charge  $t$  est présentée sur le graphe Fig. 6.13. Comme nous l'avions prédit, cette grandeur est nulle pour  $t = t_1 = 0.025s$  (charge centrée) et atteint ses extrema en  $t = t_2^- = 0.0175s$  et  $t = t_2^+ = 0.0325s$  (charge au bord de la discontinuité). On a donc  $\max(\partial Q(t)) = 37kN/m$ ,  $\min(\partial Q(t)) = -37kN/m$  et  $\Delta(\partial Q(t)) = 74kN/m$ .

En ce qui concerne le moment de flexion, la figure Fig. 6.14 montre qu'il reste positif tout au long du passage de la charge. Mais il apparaît également que sa valeur maximale n'est pas atteinte en  $t = t_1 = 0.025s$  mais en  $t \simeq 0.02125s$  et  $t \simeq 0.02875s$ . Cette variation étant sans doute due aux erreurs numériques près du bord de la charge, nous considérons que la valeur en  $t = t_1 = 0.025s$  est plus représentative de l'extremum de la fonction. Le minimum étant 0 et le maximum  $0.59kN$ , la variation de cette fonction sur un cycle est  $\Delta(\partial M(t)) = 0.59kN$ .

Sur la figure Fig. 6.15, nous retrouvons que la contrainte sur l'épaisseur de la couche au droit de la fissure est négative. La contrainte minimale en haut de couche est égale à  $-1.30MPa$ .

Enfin, l'angle moyen d'ouverture de la fissure  $\partial \Delta \phi(t)$  reste toujours positif lorsque  $t$  varie (Fig. 6.16). Il est maximal et égal à  $1.85 \cdot 10^{-4}rad$  pour  $t = t_1 = 0.025s$  (charge centrée). Sa variation sur un cycle est donc  $\Delta(\partial \Delta \phi(t)) = 1.85 \cdot 10^{-4}rad$ .

Le tableau de caractéristiques Tab. 6.1 peut donc être repris et complété avec les valeurs numériques obtenues (Tab. 6.4).

Fonction $F(t)$	Minimum $\min(F(t))$	Maximum $\max(F(t))$	Amplitude $\Delta F(t)$
$\partial N(t)$	$-58.4kN/m$	0	$58.4kN/m$
$\partial Q(t)$	$-37kN/m$	$37kN/m$	$74kN/m$
$\partial M(t)$	0	$0.59kN$	$0.59kN$
$\partial \Delta \phi(t)$	0	$1.85 \cdot 10^{-4}rad$	$1.85 \cdot 10^{-4}rad$

TABLEAU 6.4. Valeurs numériques des limites et de l'amplitude de variation des fonctions de référence du problème auxiliaire pour la chaussée étudiée

Rappelons les notations :

$$\partial N(t) = \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \int_{e_1}^0 \partial \sigma_{xx}(0, y, z, t) dz dy$$

$$\partial Q(t) = \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \int_{e_1}^0 \partial \sigma_{xz}(0, y, z, t) dz dy$$

$$\partial M(t) = \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \int_{e_1}^0 \left(z - \frac{e_1}{2}\right) \partial \sigma_{xx}(0, y, z, t) dz dy$$

$$\partial \Delta \phi(t) = \frac{1}{l_{ch}} \int_{-\frac{l_{ch}}{2}}^{\frac{l_{ch}}{2}} \frac{12}{e_2^3} \int_{e_1+e_2}^{e_1} \left(z - \left(e_1 + \frac{e_2}{2}\right)\right) \left(\partial u_x\left(\frac{l_f}{2}, y, z, t\right) - \partial u_x\left(-\frac{l_f}{2}, y, z, t\right)\right) dz dy$$

Les fonctions de référence du problème complet peuvent alors être aisément déduites de celle du problème auxiliaire en retranchant la valeur moyenne sur un cycle de chargement de période  $\tau$  pour les fonctions dépendant du champ de contrainte et en reprenant la fonction du problème auxiliaire pour les fonctions dépendant du champ de déformation.

$$N(t) = \partial N(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \partial N(t) dt \quad (6.20)$$

$$Q(t) = \partial Q(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \partial Q(t) dt \quad (6.21)$$

$$M(t) = \partial M(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \partial M(t) dt \quad (6.22)$$

$$\Delta\phi(t) = \partial\Delta\phi(t) \quad (6.23)$$

## Conclusion

Nous avons défini dans ce chapitre quatre fonctions de référence du temps  $t$ . Nous avons également déterminé les trois positions de charge particulières  $xc_i$  pour  $i = 0, 1, 2$ , correspondant à trois instants particuliers  $t_i$  pour  $i = 0, 1, 2$ , lors desquelles les grandeurs de référence atteignent leurs extrema. À partir de ces deux types d'information, nous avons pu établir les amplitudes de variation de chaque fonction lors d'un cycle de chargement (passage d'un poids lourd). Ce calcul est illustré pour un exemple précis de chaussée à assise traitée aux liants hydrauliques, qui a été modélisée grâce à l'application d'une modélisation multicouche de chaussée fissurée.

Si l'on considère que la donnée des amplitudes de variation des fonctions de référence est suffisante pour caractériser le comportement d'une chaussée, alors un essai de laboratoire représentatif de ce mode de fonctionnement doit permettre de reproduire sur une éprouvette des cycles menant aux mêmes variations. Dans le chapitre suivant, nous allons examiner comment effectuer le passage de la chaussée à l'éprouvette, c'est-à-dire comment définir et dimensionner les dispositifs expérimentaux, pour obtenir des cycles de chargement équivalents à ceux subis par une chaussée.

## Chapitre 7

# Conception de l'essai SIFIRE

### Introduction

Nous avons analysé le fonctionnement d'une chaussée semi-rigide fissurée soumise à une charge de trafic et nous l'avons caractérisé par la définition de quatre fonctions de référence évaluées tout au long d'un cycle de passage de poids lourds.

Nous souhaitons à présent définir un bâti expérimental, que l'on nommera SIFIRE (SIMulation de la FIssuration REflective) et qui permettra de reproduire le fonctionnement de la chaussée sur une éprouvette et donc la variation des quatres fonctions caractéristiques choisies. Ce chapitre traite de l'éprouvette et des moyens expérimentaux constituant le bâti d'essai.

Après avoir défini la géométrie de l'éprouvette, nous proposons des dispositifs permettant de recréer un état de contrainte équivalent à celui observé dans la chaussée. Chacun d'entre eux est défini par un ou plusieurs paramètres de dimensionnement. Dans une troisième partie, nous déterminons les valeurs optimales des paramètres de dimensionnement qui permettent de reproduire les fonctions de référence. Enfin la dernière partie est consacrée à une validation du dimensionnement par une modélisation par éléments finis plans.

### 7.1 Définition de l'éprouvette

L'éprouvette testée doit être représentative d'une chaussée semi-rigide. C'est pourquoi nous proposons de la considérer comme un bloc parallélépipédique extrait d'une structure de chaussée. Sa géométrie est donc définie par sa hauteur et ses deux dimensions dans le plan ( $oxy$ ).

#### 7.1.1 Dimensions dans le plan

En ce qui concerne les dimensions de l'éprouvette dans le plan (longueur  $L$  et largeur  $l$ ), sa taille est limitée par deux facteurs.

D'une part, elle doit être suffisante pour permettre de tester tous les systèmes retardateurs de fissuration. La grille métallique Mesh Track est le produit actuellement commercialisé qui a la plus grande dimension caractéristique. Ses mailles sont des losanges dont la grande diagonale (sens longitudinal) mesure  $118mm$  et la petite diagonale (sens transversal)  $80mm$ . Des fils plats torsadés sont également insérés transversalement tous les  $245mm$  pour optimiser l'ancrage. On peut supposer que les dimensions de l'éprouvette doivent être au moins égales à 4 fois les dimensions caractéristiques maximales d'un système retardateur de fissuration. Ainsi, en se basant sur la géométrie du Mesh Track, on obtient les dimensions minimales de l'éprouvette : une longueur  $L = 980mm$  et une largeur  $l = 320mm$ .

D'autre part, l'essai visé est un essai de laboratoire. Il est donc important que la taille de l'éprouvette ne dépasse pas cette échelle et respecte les contraintes d'encombrement imposées par cette situation.

Une réflexion selon ces deux arguments nous a amenés à considérer une éprouvette d'une **longueur  $L = 1\text{m}$**  et d'une **largeur  $l = 0.5\text{m}$** .

### 7.1.2 Composition du multicouche

Nous avons vu que les chaussées considérées sont constituées de deux couches et qu'elles reposent sur une plate-forme support. Cette structure en couches doit donc être reprise dans l'éprouvette mais la question qui se pose concerne la profondeur considérée.

Les grandeurs de référence définies dans le chapitre 6, qui nous permettent de décrire le fonctionnement de la chaussée, font intervenir des champs de contrainte ou de déplacement des deux couches de la chaussée. Il est donc nécessaire d'utiliser une éprouvette composée d'au moins deux couches.

Par contre, en ce qui concerne le sol support, aucune grandeur de référence n'est extraite de cette couche. En effet, nous avons vu que le rôle principal de cette couche est de reprendre le poids propre de la structure. Ainsi, si on étudie la chaussée en termes de variation par rapport à un état initial, le poids propre n'intervient pas et la réaction du sol-support sur la chaussée est très faible par rapport aux efforts de cisaillement dans les couches de la chaussée (Fig. 7.1).

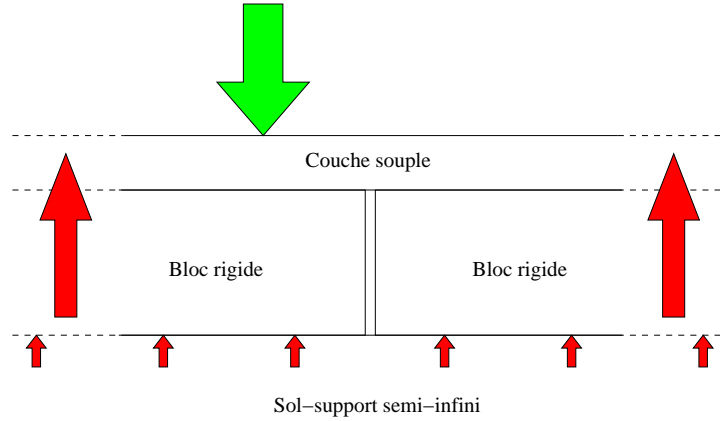


FIGURE 7.1. Réaction de la chaussée lorsqu'elle est sollicitée par une charge de trafic

Nous proposons d'illustrer ce phénomène pour le cas particulier de chaussée étudiée dans le chapitre précédent et dans le cas où la charge est centrée sur la fissure, c'est-à-dire  $xc = 0$  avec les notations proposées dans le chapitre 6. Afin de quantifier le cisaillement dans les couches de chaussée et la part des efforts repris par le sol, nous allons identifier un bloc dans la chaussée dont les dimensions dans le plan sont celles de l'éprouvette et dont la profondeur est définie par l'épaisseur des deux couches (Fig. 7.2).

Dans cette configuration, la charge de trafic appliquée, égale à  $FT = 66\text{kN}$  est répartie entre (Fig. 7.3) :

- les efforts de cisaillement sur la face  $x = \frac{L}{2} = 0.50\text{m}$  (respectivement  $x = -\frac{L}{2} = -0.50\text{m}$ ) dont la résultante est appelée  $RQx_{+\frac{L}{2}}$  (respectivement  $RQx_{-\frac{L}{2}}$ )

$$RQx_{\pm\frac{L}{2}} = - \sum_{i=1}^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} Q_x^i(\pm\frac{L}{2}, y) dy$$



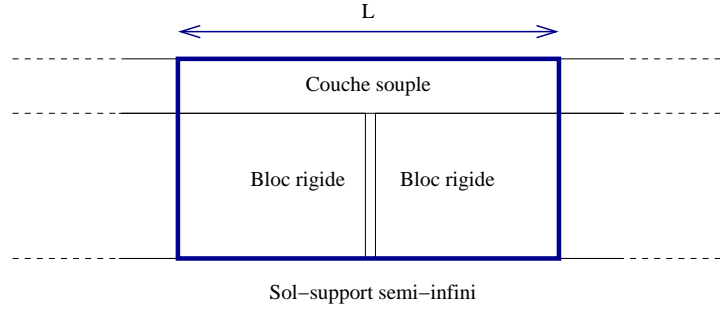


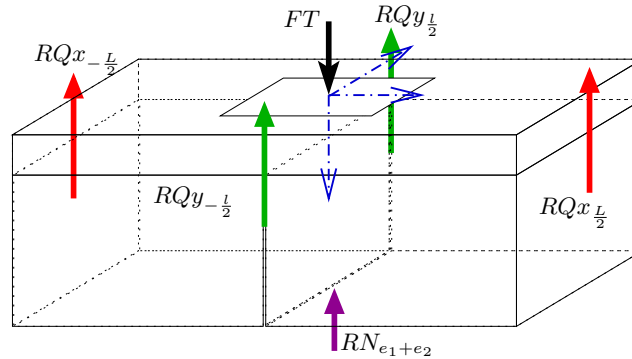
FIGURE 7.2. Identification d'une éprouvette dans la chaussée

- les efforts de cisaillement sur la face  $y = \frac{l}{2} = 0.25m$  (respectivement  $y = -\frac{l}{2} = -0.25m$ ) dont la résultante est appelée  $RQy_{\frac{l}{2}}$  (respectivement  $RQy_{-\frac{l}{2}}$ )

$$RQy_{\pm \frac{l}{2}} = - \sum_{i=1}^2 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} Q_y^i(x, \pm \frac{l}{2}) dx$$

- les efforts d'arrachement à l'interface chaussée-sol  $z = e_1 + e_2 = 0.38m$  dont la résultante est appelée  $RN_{e_1+e_2}$

$$RN_{e_1+e_2} = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sigma_{zz}(x, y, e_1 + e_2) dx dy = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \nu^{2,3}(x, y) dx dy$$

FIGURE 7.3. Reprise de la charge de trafic FT ( $xc = 0$ )

Résultante	Face	Intensité (kN)	%FT
$RQx_{\frac{L}{2}}$	$x = \frac{L}{2} = 0.5m$	7.5	11%
$RQx_{-\frac{L}{2}}$	$x = -\frac{L}{2} = -0.5m$	7.5	11%
$RQy_{\frac{l}{2}}$	$y = \frac{l}{2} = 0.25m$	22	33%
$RQy_{-\frac{l}{2}}$	$y = -\frac{l}{2} = -0.25m$	22	33%
$RN_{e_1+e_2}$	$z = e_1 + e_2 = 0.38m$	4	6%

TABLEAU 7.1. Répartition de la charge de trafic FT ( $xc = 0$ )

Tout d'abord, cette analyse conduit à une remarque concernant les erreurs liées à la résolution numérique. En effet, 6% de la charge manquent au bilan des forces. Cette erreur est en partie

expliquée par le fait que la contrainte d'arrachement  $\nu^{2,3}(x, y)$  à l'interface de la couche d'assise fissurée et du sol tend vers l'infini quand on s'approche de la fissure. La valeur calculée au niveau de ces noeuds est donc sous-estimée ainsi que l'intégrale  $RN_{e_1+e_2}$ . De plus, la résolution est réalisée sur les variables de déplacements généralisés. Les efforts généralisés sont ensuite obtenus par dérivation. Cette opération engendre elle aussi des erreurs numériques supplémentaires.

Par ailleurs, malgré ces erreurs, nous retrouvons bien que la charge de trafic appliquée est essentiellement reprise par cisaillement et que les contraintes verticales transmises au support de chaussée sous la fissure sont faibles. Les caractéristiques du sol à proximité de la fissure, pour ce type de chaussée, ne sont donc a priori pas un facteur influent du fonctionnement de la chaussée. Il n'est donc pas indispensable de recréer un sol équivalent dans l'éprouvette. Nous pouvons donc considérer uniquement les deux couches de chaussées dans l'éprouvette.

Finalement, l'éprouvette que nous utiliserons est une **éprouvette bicouche** dont la longueur est  $L = 1m$ , la largeur  $l = 0.5m$  et l'épaisseur est déterminée par l'épaisseur des couches de la chaussée étudiée, c'est-à-dire  $e_1 + e_2$ . La couche inférieure de cette éprouvette est fissurée et pour des raisons de symétrie, nous plaçons cette fissure au centre de l'éprouvette.

## 7.2 Définition des paramètres de dimensionnement des dispositifs expérimentaux

Avant de définir les dispositifs qui nous permettront de reproduire le fonctionnement d'une chaussée, il est important de noter que nous faisons le choix de concevoir un essai caractérisé par une **approche bidimensionnelle** de la chaussée. En effet, alors que la chaussée est une structure tridimensionnelle, nous souhaitons réaliser un essai représentatif de son fonctionnement mais limité à une simulation bidimensionnelle. D'une part, l'analyse présentée dans le chapitre précédent nous a montré que les champs caractérisant le mode de fonctionnement de la chaussée sont des composantes selon la direction longitudinale  $x$  et selon la profondeur  $z$  de la chaussée et que leur évolution dans la direction transverse  $y$  n'est pas déterminante pour la caractérisation du comportement de la chaussée. Une simulation dans le plan ( $Oxz$ ) est donc suffisante. D'autre part, ce choix est motivé par la volonté de réaliser un essai de laboratoire dans des conditions de température contrôlée et non pas un essai en quasi-vraie grandeur, soumis à des variations météorologiques non maîtrisées, ce type d'essai étant déjà réalisé et fonctionnant très bien (essais FABAC (voir paragraphe 5.1.3) par exemple).

Dans ce contexte de simulation bidimensionnelle de la chaussée, nous devons déterminer les moyens expérimentaux adaptés pour reproduire dans une éprouvette, dont la géométrie a été définie dans la section précédente, les fonctions de référence lors d'un cycle de chargement.

Nous avons vu que la simulation de la variation de l'angle d'ouverture faisait également partie des critères du dimensionnement du bâti d'essai. Or le graphe Fig. 6.16 nous montre que dans le cas particulier de chaussée étudiée, la variation maximale de  $\Delta\phi(t) = \partial\Delta\phi(t)$  est égale  $1.85.10^{-4}rad$ . Cette valeur est très faible puisqu'elle correspond en bas de la couche bitumineuse à une variation de déplacement de  $55.5\mu m$ , soit 1% de la largeur de la fissure. Dans la suite, nous supposons donc que ce critère est négligeable et nous vérifierons a posteriori que cette hypothèse n'était pas trop forte.

La simulation du fonctionnement de la chaussée fissurée se réduit donc à la reproduction des trois fonctions  $N(t)$ ,  $Q(t)$  et  $M(t)$ , déduites des fonctions  $\partial N(t)$ ,  $\partial Q(t)$  et  $\partial M(t)$  respectivement présentées sur les figures Fig. 6.12, Fig. 6.13 et Fig. 6.14. A l'échelle de la chaussée, l'intervalle de temps que nous avons considéré sur ces figures ne suffit pas pour visualiser l'annulation des contraintes lorsque la charge est suffisamment loin pour ne plus affecter le domaine près de la fissure. Par contre au niveau de l'éprouvette, il est nécessaire de reproduire ce phénomène. Nous

proposons donc de prolonger les signaux  $\partial N(t)$ ,  $\partial Q(t)$  et  $\partial M(t)$ , calculés dans le chapitre précédents par les points en  $t = 0$  et  $t = 0.05s$  pour lesquels les grandeurs de référence seraient nulles. Le temps de chargement considéré est donc de  $0.05s$ .

De plus nous souhaitons prendre en compte le phénomène d'auto-réparation des matériaux bitumineux. D'après [Raithby et Sterling, 1972], un temps de repos compris entre 5 et 10 fois la durée de charge permet de faire apparaître ce phénomène. Nous allons donc considérer une période de repos, que nous choisissons égale à  $0.45s$ . La période du cycle complet est donc  $\tau = 0.5s$ .

En appliquant les équations (6.20), (6.21) et (6.22), nous pouvons alors calculer la variation des fonctions de référence du problème complet. Les figures Fig. 7.4, Fig. 7.5 et Fig. 7.6 présentent ces évolutions sur un intervalle de temps de  $0.1s$  afin de conserver la lisibilité des graphiques. Ceux-ci devraient être complétés par un palier sur une durée de  $0.4s$  pour représenter le cycle complet.

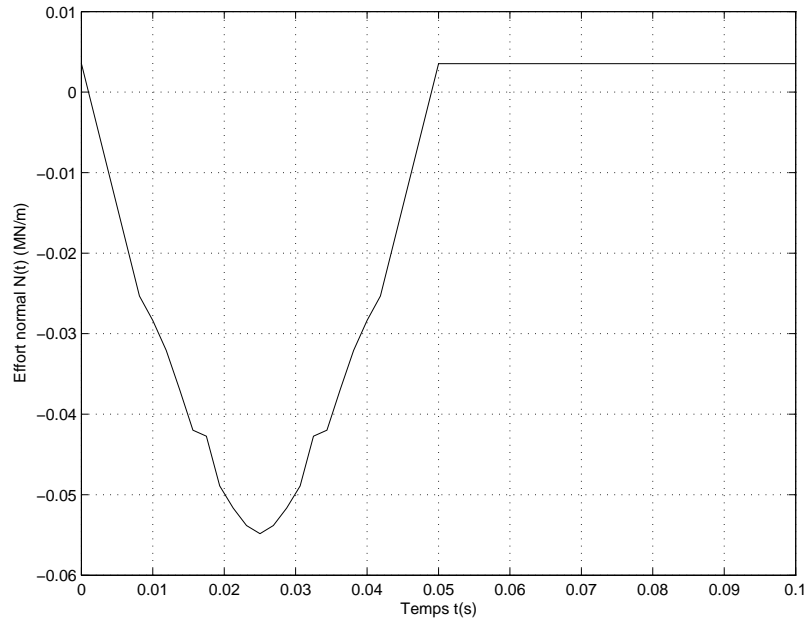
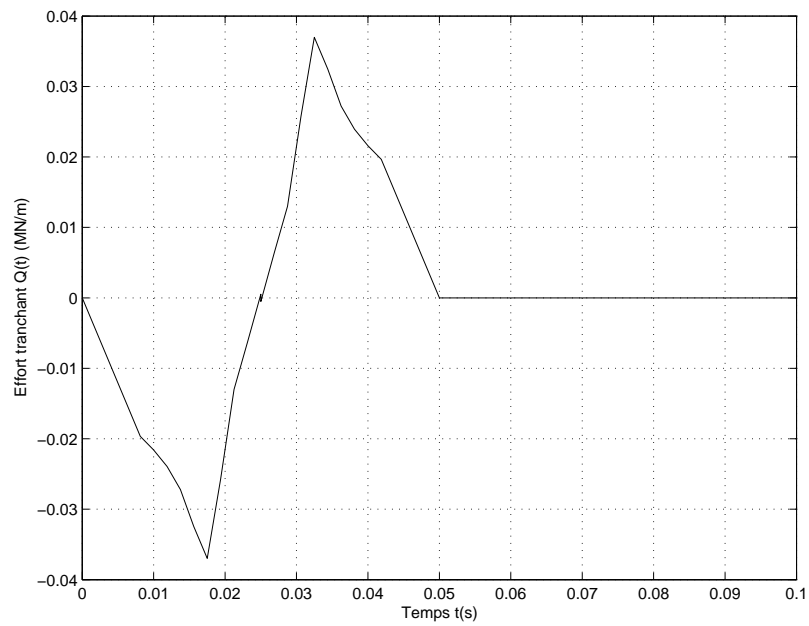
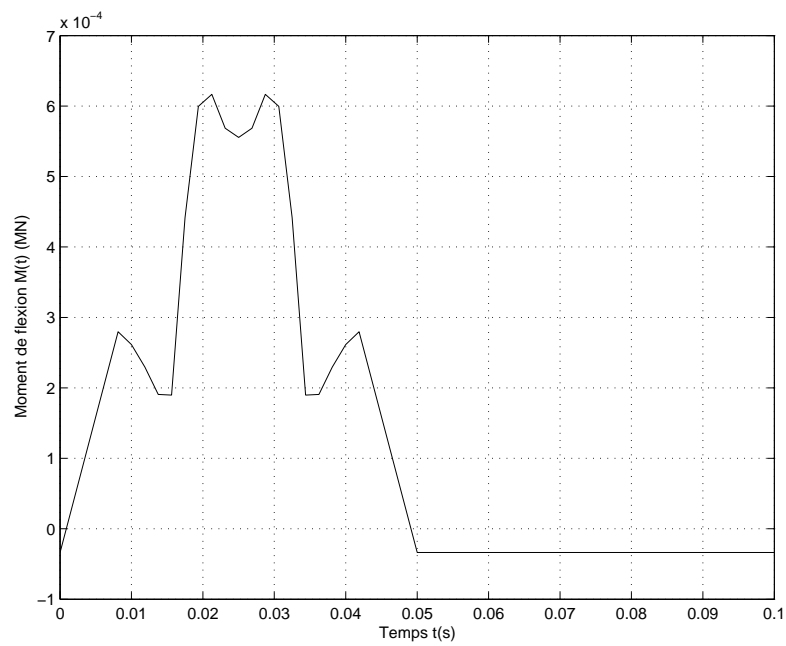


FIGURE 7.4. Effort normal  $N(t)$  en fonction du temps  $t$

Pour reproduire expérimentalement ces fonctions de référence, le principe général que nous proposons pour l'essai est une sollicitation de l'éprouvette en poutre console. Plus précisément, nous choisissons d'encasturer l'éprouvette sur la moitié gauche de sa base et de solliciter l'autre moitié par une force horizontale  $H_1(t)$  afin de reproduire l'effort normal  $N(t)$ , et par deux forces verticales  $V_1(t)$  et  $V_2(t)$  pour contrôler l'effort tranchant  $Q(t)$  et le moment de flexion  $M(t)$  dans la section au droit de la fissure.

Notons que ce bâti d'essai doit permettre de réaliser également un essai de roulement appelé TRAFIC (dénomination provisoire). Une coque circulaire fixée en dessous d'une poutre et un pilotage adéquat des vérins verticaux aux extrémités de cette poutre (Fig. 7.7) permettent de créer un mouvement de balancier (principe du "hachoir berceuse") et de simuler ainsi le passage d'un poids lourd à vitesse constante. Une étude exploratoire du dimensionnement de cet essai a permis de déterminer les positions des vérins  $x_1$ ,  $x_2$  et  $z_H$ .

La conception de cet essai est au stade de l'idée, mais la simulation du déploiement de la charge a l'intérêt de reproduire la rotation des contraintes qui a lieu lorsqu'une roue de camion circule sur une chaussée. En effet, le chargement est en réalité plus complexe qu'une simple charge verticale car des composantes de cisaillement entrent en jeu. Dans le cas de l'étude de la fissuration réfléctive cette caractéristique n'a pas une forte influence sur le fonctionnement de la chaussée. Par contre

FIGURE 7.5. Effort tranchant  $Q(t)$  en fonction du temps  $t$ FIGURE 7.6. Moment de flexion  $M(t)$  en fonction du temps  $t$

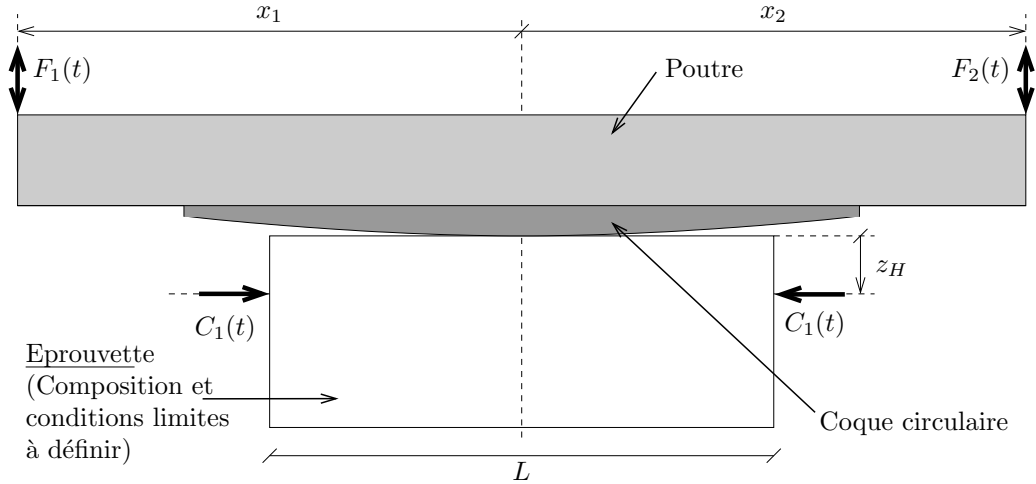


FIGURE 7.7. Schema de principe du bâti d'essai TRAFIC

dans le cas de l'étude de l'orniérage, de l'arrachage des matériaux de surface ou encore des couches de roulement minces, il pourrait être intéressant d'utiliser un essai expérimental qui reproduise ce phénomène.

Alors que l'essai TRAFIC nécessite une position particulière des vérins, les positions  $x_1$ ,  $x_2$  et  $z_H$  des vérins du bâti SIFIRE sont libres. Le calage des données pourrait être réalisé quelque soit la combinaison choisie de ces paramètres. Aussi, afin de permettre un double usage des moyens techniques mis en oeuvre, nous proposons de choisir une configuration des points d'application des forces  $H_1(t)$ ,  $V_1(t)$  et  $V_2(t)$  équivalente pour les deux essais. Nous posons alors les contraintes suivantes :

- la force  $H_1(t)$  est appliquée sur le côté droit de l'éprouvette à une distance  $z_H = 0.075m$  du milieu de la couche bitumineuse,
- la force  $V_1(t)$ , respectivement  $V_2(t)$ , est appliquée sur le haut de l'éprouvette à une abscisse  $x_1 = -1m$ , respectivement  $x_2 = 1m$ , par rapport à l'abscisse du centre de la fissure ( $x_f = 0$ ) par l'intermédiaire d'une poutre.

Pour cette même raison, la géométrie de la poutre et celle de la plaque servant de liaison entre l'éprouvette et la poutre sont fixées : la plaque est en aluminium, sa masse est de  $16kg$  et son centre se trouve à  $x_p = 0.2275m$  de la fissure, la poutre est constituée de deux profilés H en acier, sa masse totale est de  $381kg$  et elle est centrée sur la fissure.

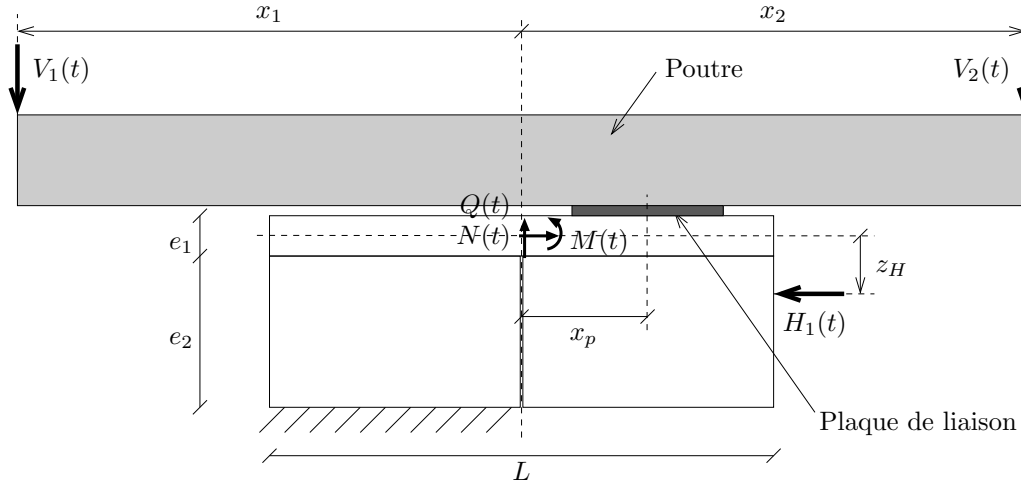
La figure Fig. 7.8 schématise le principe général de l'essai SIFIRE. Les paramètres  $x_1$ ,  $x_2$  et  $z_H$  étant fixés par les contraintes techniques liées à la réalisation d'un essai parallèle, les seuls grandeurs à déterminer sont les fonctions  $H_1(t)$ ,  $V_1(t)$  et  $V_2(t)$ .

## 7.3 Calage des paramètres de l'essai

### 7.3.1 Equilibre de l'éprouvette

Nous devons déterminer trois fonctions  $H_1(t)$ ,  $V_1(t)$  et  $V_2(t)$  permettant de reproduire dans l'éprouvette les trois fonctions de référence  $N(t)$ ,  $Q(t)$  et  $M(t)$  calculées dans la chaussée. L'écriture de l'équilibre d'une demi-épreuve va donc nous permettre de résoudre ce système linéaire de trois équations à trois inconnues.

Considérons le domaine  $\{0 \leq x \leq \frac{L}{2}, 0 \leq z \leq e_1 + e_2\}$ , qui correspond à la moitié droite de l'éprouvette en console. Les forces qui s'appliquent sur ce système sont :

FIGURE 7.8. *Schema de principe du bâti d'essai SIFIRE*

- les trois fonctions inconnues  $H_1(t)$ ,  $V_1(t)$  et  $V_2(t)$ ,
- le torseur des efforts sur la section au droit de la fissure ( $x_f = 0$ ) caractérisé par  $l.N(t)$ ,  $l.Q(t)$  et  $l.M(t)$ , avec  $l = 0.50m$  la largeur de l'éprouvette,
- le poids total  $P_1 + P_2 + P_3$  avec  $P_1$  le poids de la demi-épreuve dont le point d'application de la résultante se trouve sur la droite  $x = \frac{L}{4}$ ,  $P_2$  le poids de la poutre dont le point d'application se trouve sur la droite  $x = 0$  et  $P_3$  le poids de la plaque de liaison entre l'éprouvette et la poutre, dont le point d'application se trouve sur la droite  $x = x_p$ .

L'équilibre des forces du système s'écrit alors comme (7.1) suivant l'axe  $(0x)$  et (7.2) suivant l'axe  $(0z)$ . L'équation (7.3) correspond à l'équilibre des moments en  $C(0, \frac{e_1}{2})$ .

$$l.N(t) + H_1(t) = 0 \quad (7.1)$$

$$l.Q(t) + V_1(t) + V_2(t) + P_1 + P_2 + P_3 = 0 \quad (7.2)$$

$$l.M(t) + z_H.H_1(t) + x_1.V_1(t) + x_2.V_2(t) + \frac{L}{4}.P_1 + x_p.P_3 = 0 \quad (7.3)$$

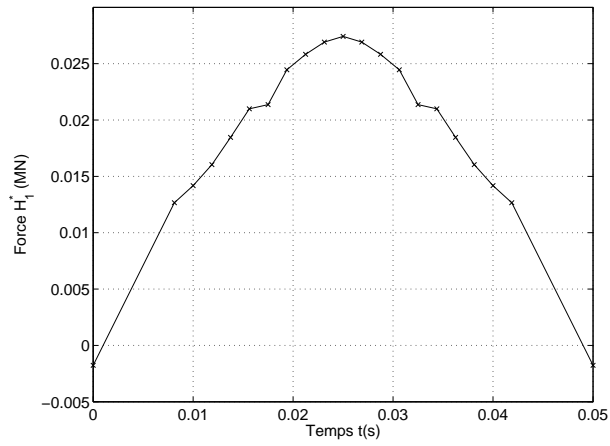
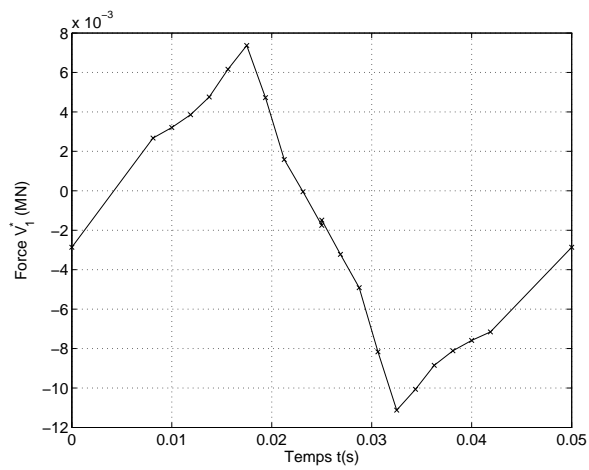
La résolution du système linéaire défini par les trois équations (7.1)-(7.2)-(7.3) nous permet d'obtenir l'expression exacte des trois fonctions inconnues. Nous notons  $H_1^*(t)$ ,  $V_1^*(t)$  et  $V_2^*(t)$ , les solutions correspondant aux fonctions  $N(t)$ ,  $Q(t)$  et  $M(t)$ .

$$H_1^*(t) = -l.N(t) \quad (7.4)$$

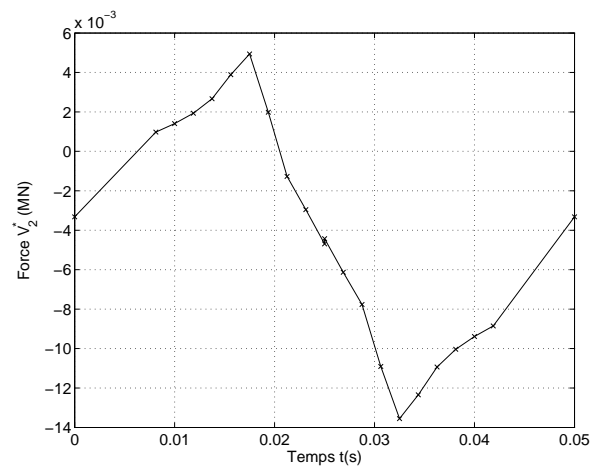
$$V_1^*(t) = \frac{1}{x_2 - x_1} \left( l.M(t) - x_2.l.Q(t) - z_H.l.N(t) + \left( \frac{L}{4} - x_2 \right).P_1 - x_2.P_2 + (x_p - x_2).P_3 \right) \quad (7.5)$$

$$V_2^*(t) = \frac{1}{x_1 - x_2} \left( l.M(t) - x_1.l.Q(t) - z_H.l.N(t) + \left( \frac{L}{4} - x_1 \right).P_1 - x_1.P_2 + (x_p - x_1).P_3 \right) \quad (7.6)$$

Les graphiques des figures Fig. 7.9 et Fig. 7.10 présentent l'allure de ces fonctions solutions.

FIGURE 7.9. Résultat exact pour la force horizontale  $H_1^*(t)$ 

(a)



(b)

FIGURE 7.10. Résultat exact pour les forces verticales (a)  $V_1^*(t)$  et (b)  $V_2^*(t)$

### 7.3.2 Prise en compte des contraintes technologiques

Les trois chargements  $H_1^*(t)$ ,  $V_1^*(t)$  et  $V_2^*(t)$  sont appliqués en utilisant des vérins. Le pilotage de ces dispositifs est limité par certaines contraintes technologiques. Notamment, l'inertie des pièces mécaniques et les capacités des moyens d'acquisition limitent les vitesses de sollicitation, ainsi que les changements brusques de sens de chargement (force de poussée ou de rappel).

Alors que le signal proposé pour la force  $H_1^*(t)$  (Fig. 7.9) ne comportent pas de changement brutal de sens de chargement, les forces  $V_1^*(t)$  et  $V_2^*(t)$  présentent quant à elles deux pics très aigus au niveau de leurs valeurs maximales et minimales.

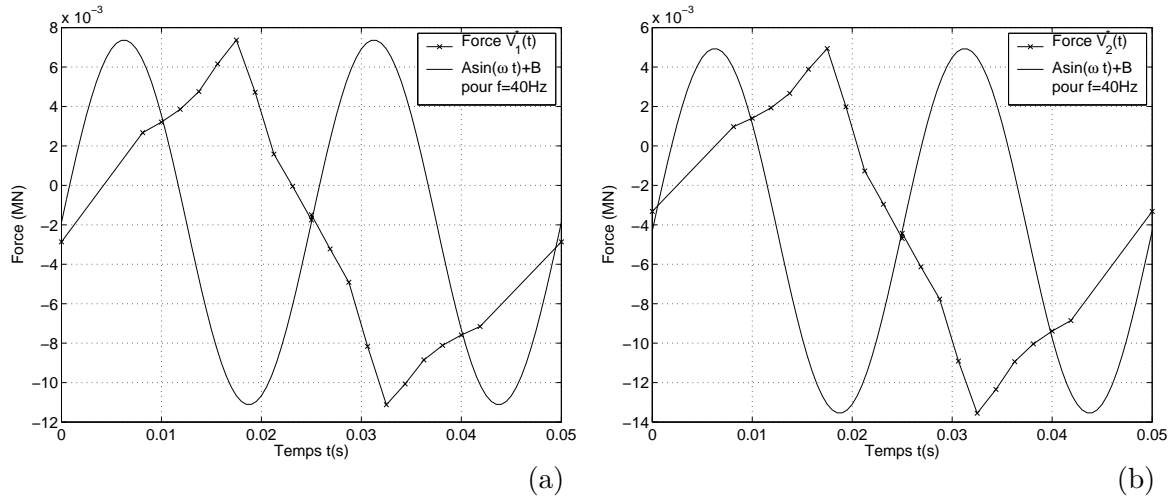


FIGURE 7.11. Fonction sinus à 40Hz et forces verticales (a)  $V_1^*(t)$  et (b)  $V_2^*(t)$

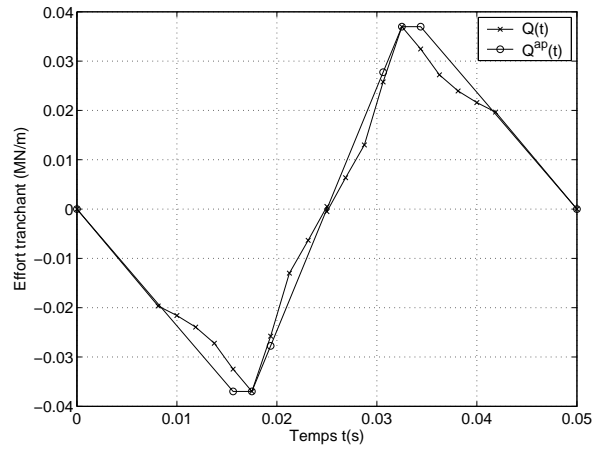
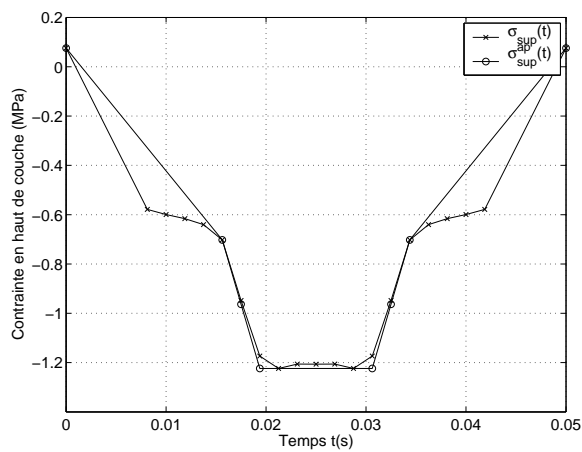
Considérons une fréquence maximale acceptable de 40Hz. Alors, nous pouvons prendre comme référence une sinusoïde de fréquence 40Hz, dont l'amplitude est égale à celle de  $V_1^*(t)$ , respectivement  $V_2^*(t)$ . Les graphiques de la figure Fig. 7.11 présentent les fonctions  $V_1^*(t)$  et  $V_2^*(t)$  superposées à cette fonction de référence en termes de vitesse maximale de chargement (pente en  $t = 0$ ) et de changement de sens de sollicitation (arrondi du pic autour de  $t = 0.0125s$ ). Il apparaît donc que les fonctions  $V_1^*(t)$  et  $V_2^*(t)$  sont acceptables en ce qui concerne la vitesse de chargement. Par contre, les pics aigus en  $t = 0.0175s$  et  $t = 0.0325s$  ne pourront pas être reproduits exactement. Il s'agit donc de trouver deux fonctions  $V_1(t)$  et  $V_2(t)$  approchées, acceptables en termes de  $N(t)$ ,  $M(t)$  et  $Q(t)$  à reproduire, mais aussi en termes de signal à contrôler par les vérins.

Pour cela, nous proposons d'approcher les fonctions de référence par des fonctions affines par morceaux, sans pic trop aigu. Jusqu'à présent nous nous sommes concentrés sur les trois fonctions  $N(t)$ ,  $M(t)$  et  $Q(t)$  parce que leur donnée est tout à fait équivalente à la donnée des trois fonctions  $Q(t)$ ,  $\sigma_{sup}(t)$  et  $\sigma_{inf}(t)$ . Toutefois, d'un point de vue de la propagation de la fissure, les contraintes en haut et en bas de couche ont davantage un sens mécanique que l'effort normal et le moment de flexion moyen dans la couche. Aussi, si nous considérons des fonctions approchées, il est préférable de choisir ces approximations directement au niveau des fonctions  $Q(t)$ ,  $\sigma_{sup}(t)$  et  $\sigma_{inf}(t)$ .

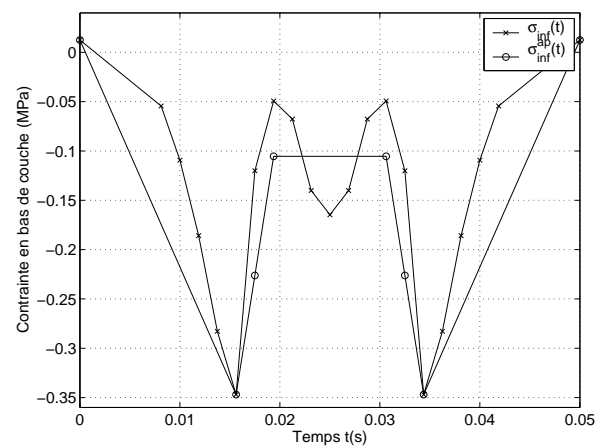
Nous avons ainsi décomposé l'effort tranchant  $Q(t)$  en cinq morceaux affines en prenant soin d'ajouter un palier au niveau du pic (Fig. 7.12). Les contraintes  $\sigma_{sup}(t)$  en haut de couche et  $\sigma_{inf}(t)$  en bas de couche, sont également découpées en cinq parties (Fig. 7.13). Notons que ces approximations sont réalisées en se fixant comme critère de respecter les valeurs maximales et minimales des trois fonctions de référence, afin de reproduire la même amplitude de chargement que dans la chaussée.

Les points caractéristiques de chacune de ces approximations sont donnés dans le tableau Tab.



FIGURE 7.12. Découpage de la fonction  $Q(t)$  en cinq morceaux

(a)



(b)

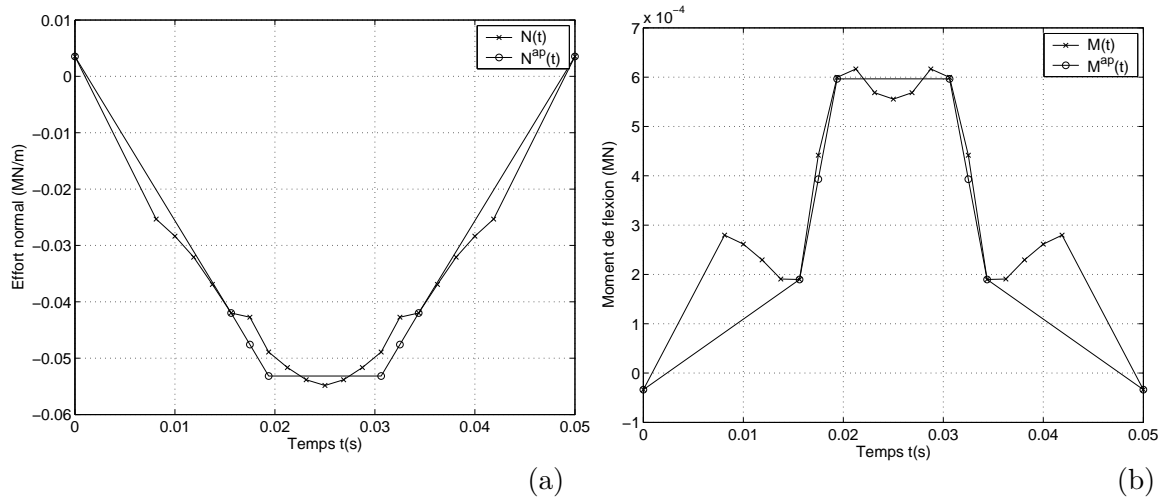
FIGURE 7.13. Découpage (a) de la fonction  $\sigma_{sup}(t)$  en trois morceaux et (b) de la fonction  $\sigma_{inf}(t)$  en cinq morceaux

7.2.

Numéro $i$ du point	$Q(t)^{ap}(t)(MN)$		$\sigma_{sup}^{ap}(t)(MPa)$		$\sigma_{inf}^{ap}(t)(MPa)$	
	$t_i(s)$	$Q_i^{ap}(t)$	$t_i(s)$	$\sigma_{sup_i}^{ap}(t)$	$t_i(s)$	$\sigma_{inf_i}^{ap}(t)$
1	0	0	0	0.0758	0	0.0125
2	0.0156	-0.03698	0.0156	-0.7026	0.0156	-0.3470
3	0.0175	-0.03698				
4			0.0194	-1.2239	0.0194	-0.1054
5			0.0306	-1.2239	0.0194	-0.1054
6	0.0325	0.03698				
7	0.0344	0.03698	0.0344	-0.7026	0.0344	-0.3470
8	0.05	0	0.05	0.0758	0.05	0.0125

TABLEAU 7.2. *Points caractéristiques des approximations affines par morceaux des trois fonctions de référence calculées dans la chaussée*

L'effort normal  $N^{ap}(t)$  et le moment de flexion  $M^{ap}(t)$  peuvent être alors recalculés à partir de ces approximations. La figure Fig. 7.14 présente ces approximations, en superposition avec les fonctions exactes. Nous observons que les approximations respectent les évolutions générales des fonctions. Par contre, les extrema ne sont pas reproduits. Il était donc important de se fixer sur les évolutions de  $\sigma_{sup}(t)$  et  $\sigma_{inf}(t)$  pour choisir les points caractéristiques.

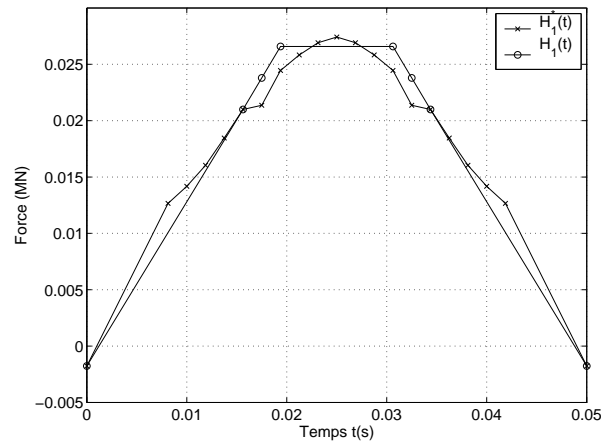
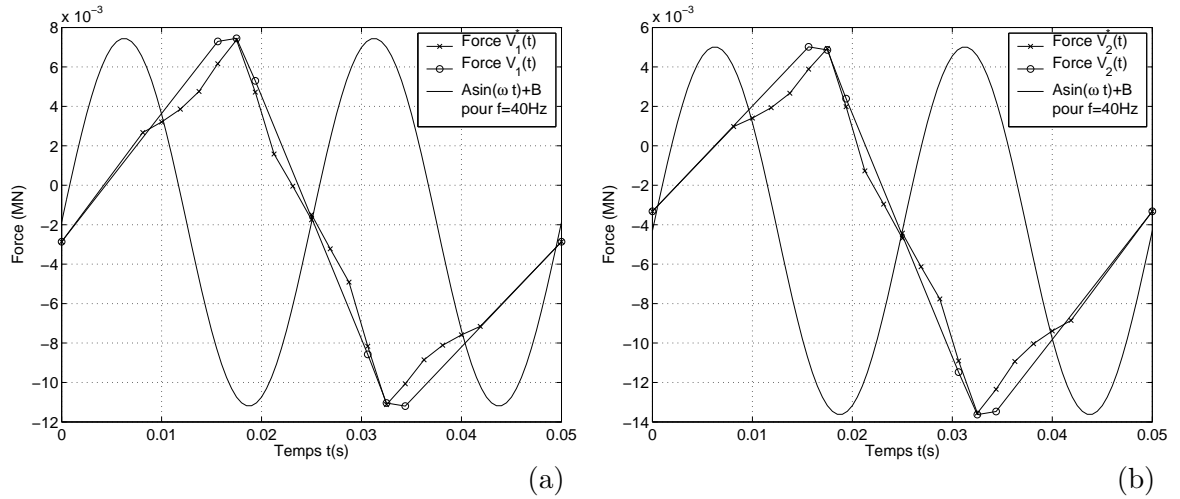
FIGURE 7.14. *Approximation (a) de l'effort normal et (b) du moment de flexion*

Pour obtenir les fonctions de chargement  $H_1(t)$ ,  $V_1(t)$  et  $V_2(t)$  correspondant aux fonctions de référence approchées  $N^{ap}(t)$ ,  $Q^{ap}(t)$  et  $M^{ap}(t)$ , il suffit alors d'appliquer les trois relations (7.4)-(7.5)-(7.6) au niveau de chaque point caractéristique. Nous obtenons alors :

- la fonction  $H_1(t)$  composée de cinq segments (Fig. 7.15),
- la fonction  $V_1(t)$  composée de sept segments (Fig. 7.16(a)),
- la fonction  $V_2(t)$  composée de sept segments (Fig. 7.16(b)).

Les graphiques de la figure Fig. 7.16 nous montrent également que les pics présentés par les fonctions  $V_1^*(t)$  et  $V_2^*(t)$  ont été suffisamment étalés pour être comparables à l'arrondi de la sinusoïde associée pour une fréquence de  $40Hz$ .

Le tableau Tab. 7.3 présente les valeurs des points caractéristiques des fonctions de chargement de l'éprouvette.

FIGURE 7.15. Approximation de la force horizontale  $H_1(t)$ FIGURE 7.16. Approximation des forces verticales (a)  $V_1(t)$  et (b)  $V_2(t)$  et sinusoïdes associées pour une fréquence de 40Hz

Numéro $i$ du point	$H_1(t)(MN)$		$V_1(t)(MN)$		$V_2(t)(MN)$	
	$t_i(s)$	$H_1^i(t)$	$t_i(s)$	$V_1^i(t)$	$t_i(s)$	$V_2^i(t)$
1	0	-0.00177	0	-0.00286	0	-0.00332
2	0.0156	0.02099	0.0156	0.00729	0.0156	0.00502
3			0.0175	0.00745	0.0175	0.00486
4	0.0194	0.02659	0.0194	0.00529	0.0194	0.00239
5	0.0306	0.02659	0.0306	-0.00857	0.0306	-0.01147
6			0.0325	-0.01104	0.0325	-0.01363
7	0.0344	0.02099	0.0344	-0.01120	0.0344	-0.01347
8	0.05	-0.00177	0.05	-0.00286	0.05	-0.00332

TABLEAU 7.3. Points caractéristiques des approximations affines par morceaux des trois fonctions de chargement de l'éprouvette

### 7.3.3 Sensibilité des paramètres de chargement

Etudions à présent l'influence d'une petite variation des fonctions de chargement  $H_1(t)$ ,  $V_1(t)$  et  $V_2(t)$  sur les fonctions de référence  $Q^{ap}(t)$ ,  $\sigma_{sup}^{ap}(t)$  et  $\sigma_{inf}^{ap}(t)$ . Les trois relations entre ces fonctions peuvent être exprimées de la manière suivante :

$$Q^{ap}(t) = -\frac{1}{l} (V_1(t) + V_2(t) + P_1 + P_2 + P_3)$$

$$\sigma_{sup}^{ap}(t) = \frac{6}{e_1^2.l} \left( \left( z_H - \frac{e_1}{6} \right) . H_1(t) + \frac{L}{4} . P_1 + x_p . P_3 + x_1 . V_1(t) + x_2 . V_2(t) \right)$$

$$\sigma_{inf}^{ap}(t) = \frac{6}{e_1^2.l} \left( - \left( z_H + \frac{e_1}{6} \right) . H_1(t) - \frac{L}{4} . P_1 - x_p . P_3 - x_1 . V_1(t) - x_2 . V_2(t) \right)$$

Nous pouvons alors écrire les variations de chacune des trois fonctions de référence en fonction des variations des trois fonctions de chargement.

$$dQ^{ap}(t) = -\frac{1}{l} (dV_1(t) + dV_2(t)) \quad (7.7)$$

$$d\sigma_{sup}^{ap}(t) = \frac{6}{e_1^2.l} \left( z_H - \frac{e_1}{6} \right) . dH_1(t) + \frac{6x_1}{e_1^2.l} . dV_1(t) + \frac{6x_2}{e_1^2.l} . dV_2(t) \quad (7.8)$$

$$d\sigma_{inf}^{ap}(t) = -\frac{6}{e_1^2.l} \left( z_H + \frac{e_1}{6} \right) . dH_1(t) - \frac{6x_1}{e_1^2.l} . dV_1(t) - \frac{6x_2}{e_1^2.l} . dV_2(t) \quad (7.9)$$

Si nous considérons une variation des trois forces exercées de 30N et si nous injectons ces variations dans les expressions (7.7)-(7.8)-(7.9), nous obtenons :

- une variation de 120N sur l'effort tranchant  $Q^{ap}(t)$ , soit 0.3% de l'effort tranchant maximal,
- une variation de 0.116MPa sur la contrainte en haut de couche  $\sigma_{sup}^{ap}(t)$ , soit 9.5% de la contrainte minimale en haut de couche,
- une variation de 0.117MPa sur la contrainte en bas de couche  $\sigma_{inf}^{ap}(t)$ , soit 34% de la contrainte minimale en bas de couche.

Il est donc important de remarquer que la contrainte dans la couche supérieure est très sensible aux variations des forces appliquées même si celles-ci sont faibles. Plus particulièrement, la contrainte calculée en bas de couche, près de la fissure, varie de façon importante si une petite imprécision est injectée dans les fonctions de chargement.

## 7.4 Validation par une modélisation aux éléments finis

Afin de valider le calcul des efforts réalisés précédemment et surtout d'évaluer les déplacements et les rotations sur les faces de l'éprouvette, nous avons réalisé une modélisation par éléments finis de l'éprouvette et des dispositifs de chargement. Le logiciel utilisé est ABAQUS. C'est un code de calcul par la méthode des éléments finis créé en 1978. Il est adapté pour les applications dans les domaines mécaniques, thermiques, électriques et les problèmes couplés. Il peut réaliser des calculs statiques ou dynamiques et prendre ou non en compte des nonlinéarités. Ce logiciel comporte deux grands types de code : ABAQUS/Standard, qui correspond à une résolution par un algorithme statique et implicite et ABAQUS/Explicit, qui correspond à une résolution par un algorithme dynamique et explicite. Pour le problème élastique linéaire sous chargement statique dont il s'agit ici, c'est le module ABAQUS/Standard qui sera utilisé.

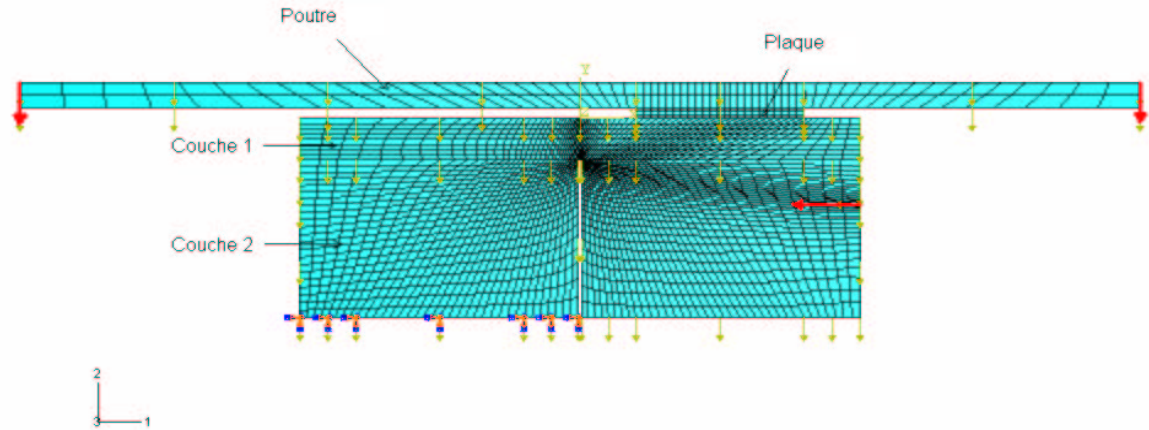


FIGURE 7.17. Maillage de l'éprouvette et du bâti; conditions limites et de chargement appliquées

Les objets représentés dans la modélisation sont : l'éprouvette, la poutre sur laquelle s'appliquent les deux forces  $V_1$  et  $V_2$  et la plaque de liaison entre la poutre et l'éprouvette (Fig. 7.17).

Le maillage a été réalisé avec des éléments bidimensionnels nommés *CPE4R* dans ABAQUS : ce sont des quadrangles à 4 noeuds en déformations planes. Le choix d'hypothèse de déformations planes est motivé par l'objectif de connaître les contraintes et déplacements dans le plan moyen longitudinal de l'éprouvette ( $y = 0$ ). Les matériaux utilisés pour chaque partie sont décrits dans le tableau Tab. 7.4.

Partie	Masse volumique ( $kg/m^3$ )	Module d'Young $GPa$	Coefficient de Poisson
Couche 1	2300	11.9	0.35
Couche 2	2500	27.7	0.25
Plaque	3132	70	0.3
Poutre	7850	210	0.3

TABLEAU 7.4. Caractéristiques des matériaux constituant chaque partie

En ce qui concerne les conditions limites, les déplacements horizontaux (selon  $(0x)$ ) et verticaux (selon  $(0y)$ ) sont bloqués sur le segment représentant la face inférieure de la moitié gauche de la couche de béton (couche 2) (Fig. 7.17).

Le chargement appliqué à l'ensemble est constitué :

- du poids de chaque objet (flèches jaunes sur Fig. 7.17) : éprouvette, plaque, poutre
- de trois forces ponctuelles (flèches rouges sur Fig. 7.17) : une force horizontale  $H_1$  dirigée vers la gauche, appliquée sur le bord droit de l'éprouvette à une distance de  $0.075m$  du milieu de la couche 1, deux forces verticales  $V_1$  et  $V_2$  dirigées vers le bas, appliquées à chacune des extrémités de la poutre.

Alors que les poids sont des forces constantes, les forces ponctuelles  $H_1$ ,  $V_1$  et  $V_2$  évoluent avec le temps. Nous avons donc réalisé un chargement par étape pour ces forces. Chaque étape correspond à un numéro de point  $i$  ( $i = 1..8$ ), comme décrit précédemment dans le tableau Tab. 7.3.

Les figures Fig. 7.18, Fig. 7.19 et Fig. 7.20 représentent à l'étape  $i = 4$  ( $t = 0.0194s$ ), respec-

tivement la déformée de la structure pour un coefficient d'amplification de 63.1 et l'évolution des contraintes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{xy}$ .

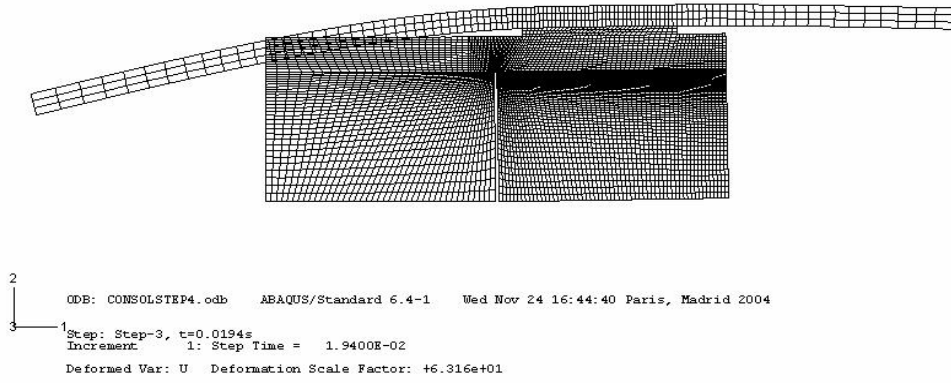


FIGURE 7.18. *Déformée de la structure à  $t = 0.0194s$  ou  $i = 4$*

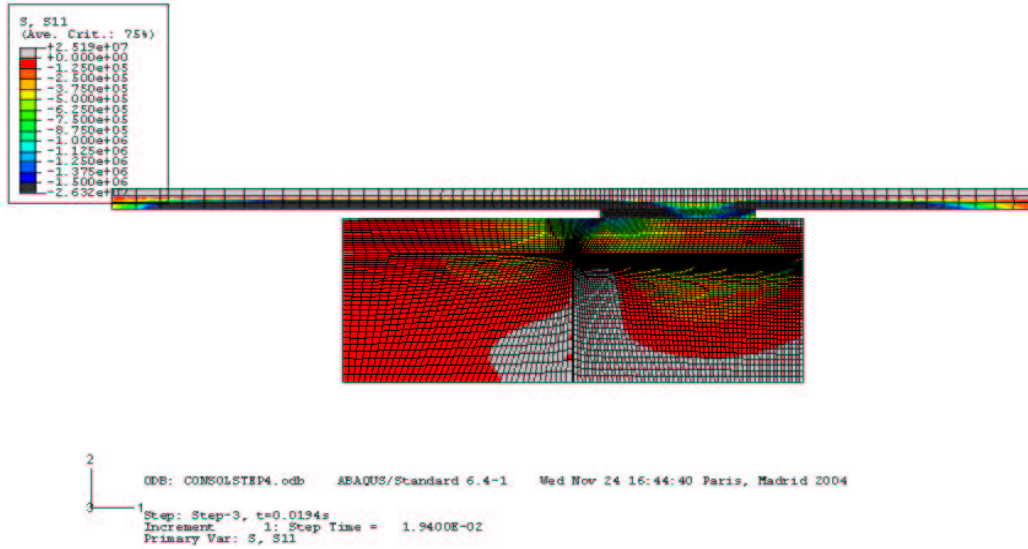


FIGURE 7.19. *Répartition de la contrainte longitudinale  $\sigma_{xx}$  à  $t = 0.0194s$  ou  $i = 4$*

En intégrant ces contraintes, pour chaque étape, sur le segment vertical au-dessus de la fissure dans la couche 1, nous retrouvons bien la valeur des fonctions de référence approchées  $N_{ap}$ ,  $Q_{ap}$ ,  $M_{ap}$  en ces points.

Ce calcul nous permet également d'évaluer l'évolution de l'angle d'ouverture de la fissure  $\Delta\phi(t)$  tout au long du chargement. La figure Fig. 7.21 présente le profil de déformation des deux lèvres de la fissure. La partie gauche de l'éprouvette étant encastree, le côté gauche ( $x = -\frac{l_f}{2}$ ) a un déplacement très faible alors que le déplacement selon ( $0x$ ) de la lèvre droite ( $x = \frac{l_f}{2}$ ) est relativement important et est quasiment affine avec la cote  $z$ .

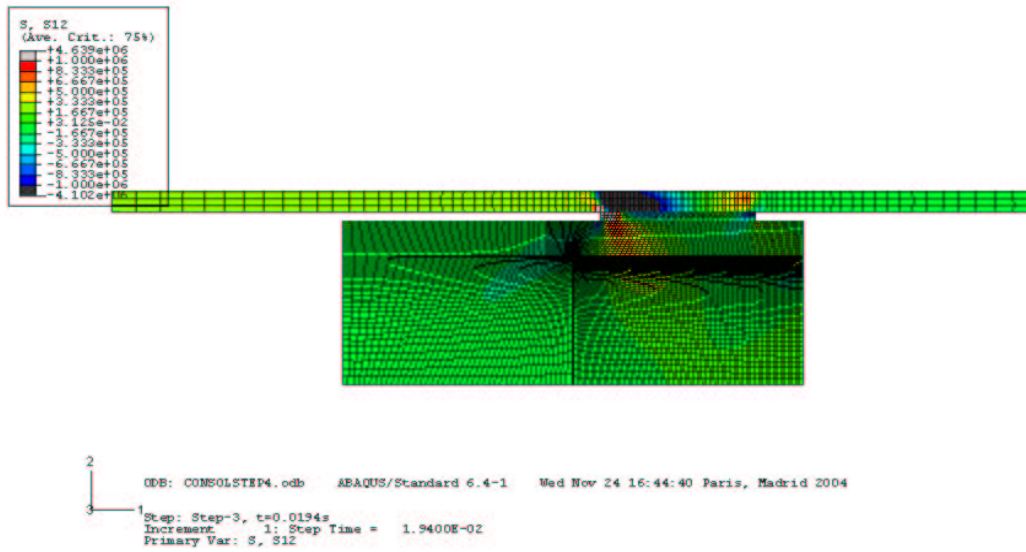


FIGURE 7.20. Répartition de la contrainte de cisaillement  $\sigma_{xy}$  à  $t = 0.0194s$  ou  $i = 4$

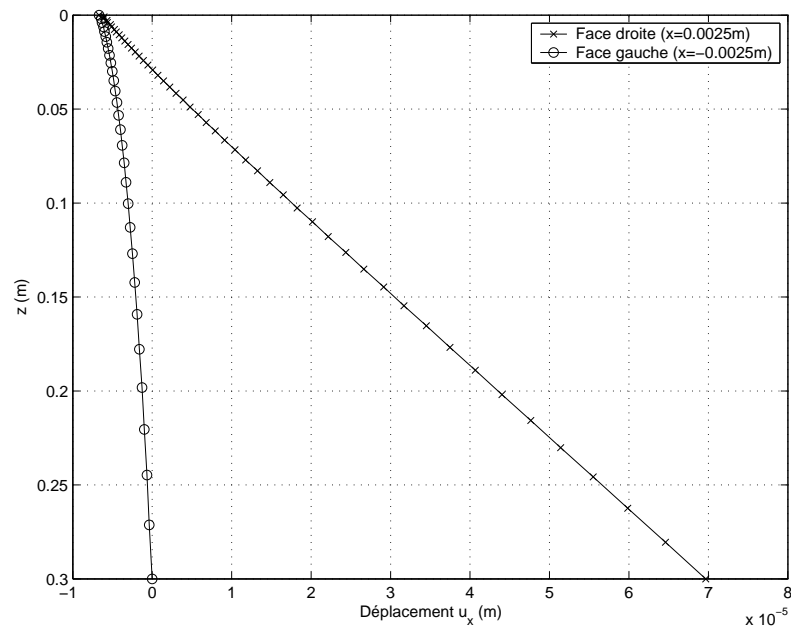


FIGURE 7.21. Déplacement  $u_x$  des deux lèvres de la fissure à  $t = 0.0194s$  ou  $i = 4$

Dans le chapitre précédent, nous avons défini  $\Delta\phi$  comme étant la différence entre la rotation moyenne  $\phi_{\frac{l_f}{2}}$  de la lèvres droite de la fissure ( $x = \frac{l_f}{2}$ ) et la rotation moyenne  $\phi_{-\frac{l_f}{2}}$  de la lèvres gauche ( $x = -\frac{l_f}{2}$ ). Nous proposons d'évaluer ces deux rotations par l'intégration suivante :

$$\phi_{\frac{l_f}{2}} = \frac{12}{e_2^3} \int_0^{e_2} \left(z - \frac{e_2}{2}\right) \partial u_x\left(\frac{l_f}{2}, z\right) dz$$

$$\phi_{-\frac{l_f}{2}} = \frac{12}{e_2^3} \int_0^{e_2} \left(z - \frac{e_2}{2}\right) \partial u_x\left(-\frac{l_f}{2}, z\right) dz$$

Pour  $x = -\frac{l_f}{2}$ , les déplacements  $u_x$  étant très faibles, la rotation moyenne  $\phi_{-\frac{l_f}{2}}$  est quasiment nulle. Par contre, pour  $x = \frac{l_f}{2}$ , la valeur calculée  $\phi_{\frac{l_f}{2}}$  correspond à l'inverse de la pente de la droite de déplacement présentée en Fig. 7.21. L'évolution de la différence de ces deux fonctions en fonction du temps ( $i = 1..8$ ) est présentée sur le graphique Fig. 7.22. Elle est également comparée avec les valeurs calculées dans la chaussée. Nous observons donc une bonne concordance des valeurs de l'angle d'ouverture de la fissure dans l'éprouvette et dans la chaussée. La valeur maximale de cette fonction dans l'éprouvette est 4% plus importante que celle calculée dans la chaussée. Comme nous l'avons déjà vu, ces valeurs étant très faibles, nous pouvons considérer que cette variable n'est pas une fonction de référence pour le cas de chaussée et de chargement traité ici. Cette comparaison est donc présentée uniquement à titre indicatif.

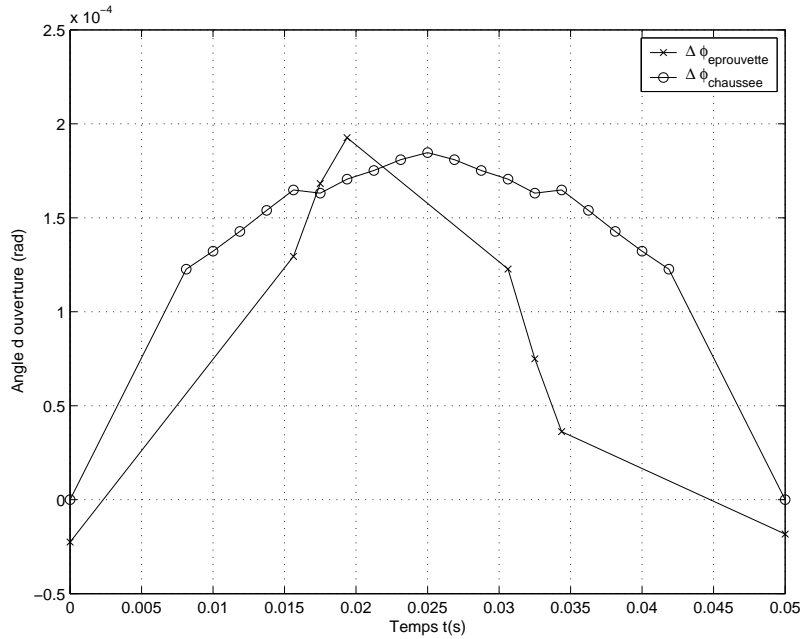


FIGURE 7.22. Evolution en fonction du temps de l'angle d'ouverture de la fissure dans la chaussée et dans l'éprouvette

## Conclusion

En conclusion, nous avons proposé un ensemble de dispositifs expérimentaux permettant de reproduire dans l'éprouvette, les cycles de chargement calculés dans la chaussée en termes d'effort



tranchant et de contraintes équivalentes dans la couche bitumineuse. Le dimensionnement de leurs caractéristiques consiste à réaliser une approximation des signaux à reproduire et à résoudre un système linéaire de trois équations à trois inconnues. Une vérification par une modélisation bidimensionnelle par éléments finis en déformations planes a également été effectuée. Il nous permet de connaître les déplacements et les rotations sur les faces de l'éprouvette. Cette démarche simple de dimensionnement du bâti d'essai SIFIRE, qui a fait l'objet de ce chapitre et du précédent, est résumée dans le schéma Fig. 7.23.

Notons que dans l'exemple traité, la simulation de l'angle d'ouverture de la fissure n'a pas été prise en compte car la valeur de cette grandeur était très faible (branche gauche de l'organigramme Fig. 7.23). Toutefois, dans les cas où cette fonction atteint des valeurs plus représentatives, il est tout à fait envisageable d'en tenir compte en ajoutant un second vérin horizontal permettant de contrôler l'ouverture de la fissure. Une quatrième fonction de chargement est alors insérée ( $H_2(t)$ ), ainsi qu'une quatrième équation exprimant l'angle d'ouverture de la fissure en fonction des paramètres de l'essai (branche droite de l'organigramme Fig. 7.23). Ce système à quatre équations et quatre inconnues peut alors être aisément résolu.

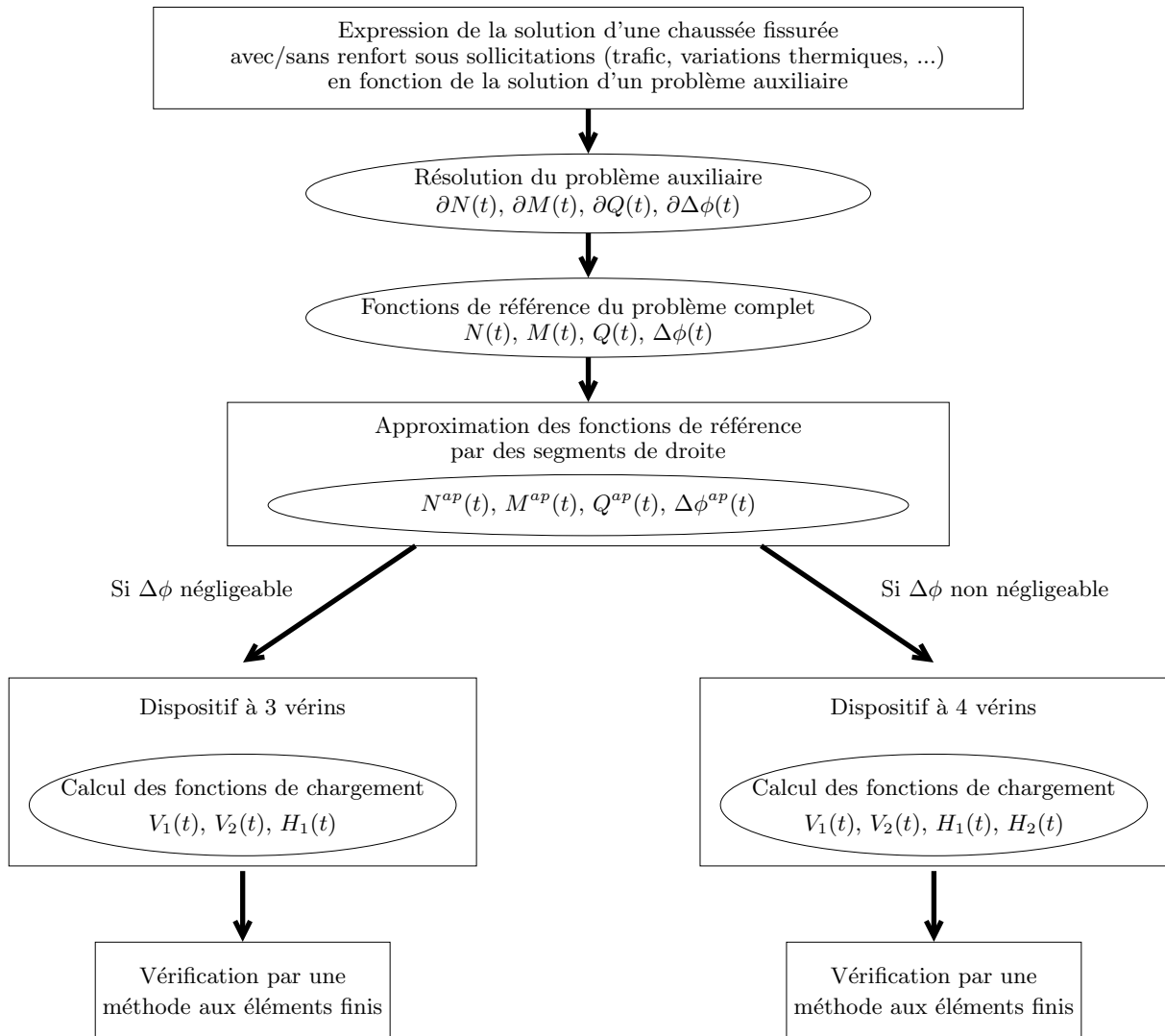


FIGURE 7.23. Démarche de dimensionnement du bâti d'essai SIFIRE



## Chapitre 8

# Réalisation du bâti d'essai SIFIRE

### Introduction

Comme nous l'avons vu, le bâti d'essai dont il est question, est constitué de deux portiques auxquels sont reliés les deux vérins verticaux, eux-mêmes reliés à une poutre, et d'un dispositif permettant d'appliquer une force horizontale (Fig. 8.1). Ce bâti doit pouvoir servir à deux types d'essai : l'essai SIFIRE dont les caractéristiques ont été précisément présentées dans le chapitre 7 et l'essai TRAFIC, dont le cahier des charges a été brièvement exposé dans ce même chapitre et doit encore être complété.

Dans la première section de ce chapitre, nous détaillons les moyens techniques mis en oeuvre pour la réalisation du bâti d'essai SIFIRE. Il y est donc question des systèmes d'application de la charge horizontale et des charges verticales, de leur pilotage, ainsi que de l'instrumentation de l'essai. La fabrication des éprouvettes est ensuite présentée dans la seconde section. Enfin, la troisième section fait le point sur les problèmes de pilotage rencontrés et la situation de la campagne expérimentale au moment de la rédaction de ce mémoire.

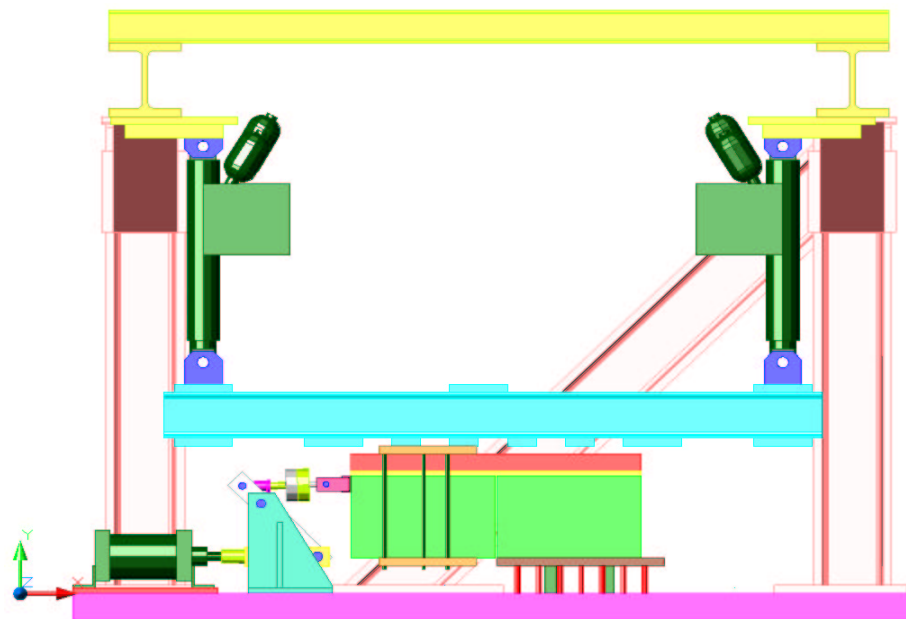


FIGURE 8.1. *Présentation du bâti d'essai*

## 8.1 Mise au point du bâti d'essai

### 8.1.1 Chargements verticaux

La structure composée de deux vérins verticaux et d'une poutre (Fig. 8.2) a pour rôle :

- soit de piloter le couple (cisaillement ; moment de flexion) dans la couche bitumineuse de l'éprouvette (essai SIFIRE), grâce à l'encastrement de la poutre sur la demi-longueur de l'éprouvette,
- soit de simuler le déploiement d'une charge de poids lourds et donc la rotation des contraintes au sein de la couche bitumineuse (essai TRAFIC), grâce la mise en place d'une coque circulaire sous la poutre conduisant à un déplacement pendulaire de type "hachoir berceuse" de l'ensemble.

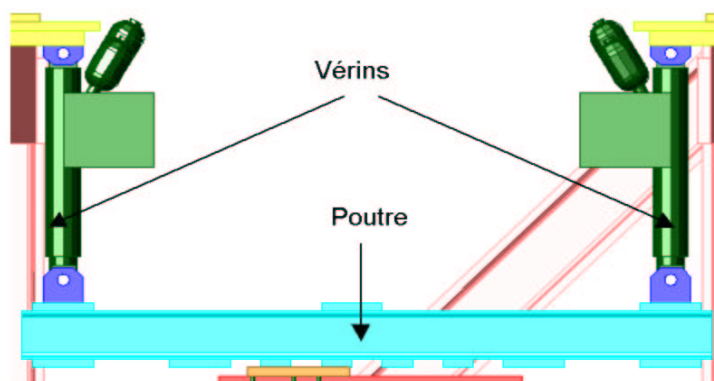


FIGURE 8.2. Dispositif poutre + vérins d'application de la charge verticale

Pour ce système, nous avons choisi des vérins hydrauliques fournis par QUIRI HYDROMECHANIQUE de type HIFI J ST 63/45-060, qui sont reliés à une centrale hydraulique (40l/mn). Les caractéristiques principales de ces vérins linéaires à joints sont présentées dans le tableau Tab. 8.1. Le guidage des vérins à joints est assuré par une bague de glissement en matériau composite traité, ce qui permet de supporter des vitesses élevées sous des charges radiales, et induit des frottements très faibles.

Section de compression	31.17	cm <sup>2</sup>
Section de traction	15.27	cm <sup>2</sup>
Effort nominal statique de compression à 210bar	65	kN
Effort nominal statique de traction à 210bar	32	kN
Effort nominal dynamique de compression à 180bar	56	kN
Effort nominal dynamique de traction à 180bar	27	kN
Masse	57	kg

TABEAU 8.1. Caractéristiques principales des vérins hydrauliques utilisés

La poutre est dimensionnée en imposant des critères de résistance mécanique et de résistance en fatigue réglementés par les Eurocodes.

Plus précisément, nous choisissons de dimensionner une poutre en acier et c'est donc l'Eurocode 3 [CEN, 1992] qui nous impose les exigences à vérifier.

Nous considérons deux cas de chargement qui correspondent aux deux types d'essai qui pourront être réalisés sur le bâti. Le schéma Fig. 8.3, respectivement Fig. 8.4, présente le problème mécanique simplifié des efforts s'exerçant sur la poutre lors d'un essai SIFIRE, respectivement essai TRAFIC.

Dans le cas de l'essai SIFIRE, la poutre reste toujours horizontale, alors que pour l'essai TRAFIC, on lui applique une légère rotation pouvant créer un effort normal et on appelle  $\alpha$  l'inclinaison de la poutre. Comme cet angle est petit, on peut supposer que  $\cos \alpha = 1$  et  $\sin \alpha = \alpha = \frac{xc(t)}{R}$ , avec  $R$  le rayon de la coque.

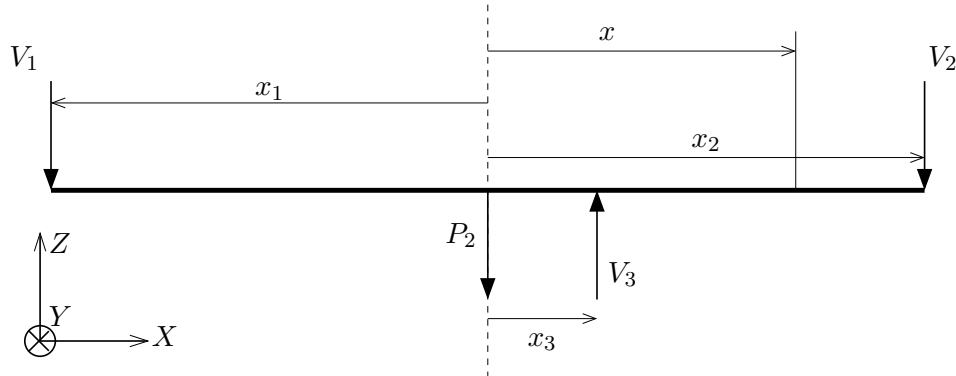


FIGURE 8.3. Problème mécanique simplifiée de la poutre pour l'essai SIFIRE

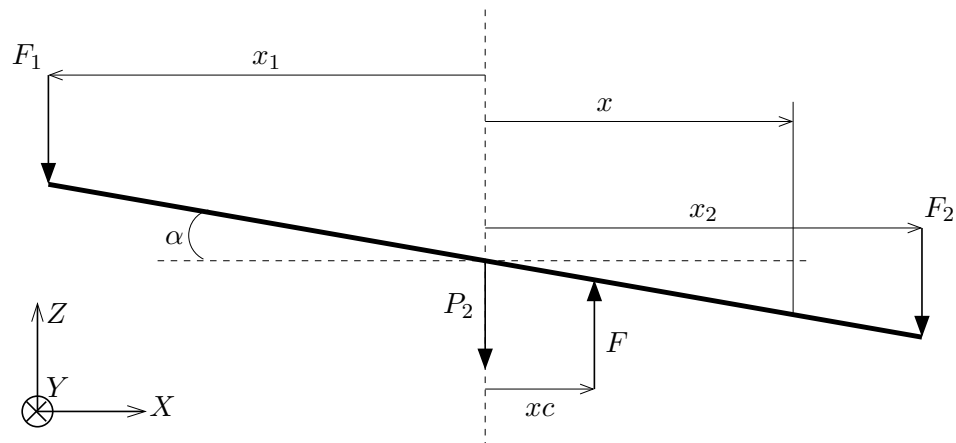


FIGURE 8.4. Problème mécanique simplifiée de la poutre pour l'essai TRAFIC

Mis à part quelques légères variations, les configurations des deux chargements sont assez semblables. Les forces qui s'appliquent sur la poutre sont :

- les forces verticales appliquées aux extrémités par les vérins : nous les nommons  $V_1$  et  $V_2$  dans le cas de l'essai SIFIRE,  $F_1$  et  $F_2$  dans le cas de l'essai TRAFIC
- la réaction de la plaque sur la poutre (essai SIFIRE) ou de l'éprouvette sur la poutre (essai TRAFIC) : c'est une force répartie sur la longueur de la plaque (essai SIFIRE) ou de la surface de charge (essai TRAFIC), toutefois par souci de simplicité, le dimensionnement est réalisé en considérant une force ponctuelle équivalente appelée  $V_3$  dans le cas de l'essai SIFIRE et  $F$  dans le cas de l'essai TRAFIC. Le point d'application de  $F$  correspond à l'abscisse du centre de la charge  $xc$ . Par contre, dans le cas de SIFIRE, comme la plaque est reliée par un encastrement à la poutre, le moment n'est pas forcément nul et le point d'application de la force  $V_3$  ne se trouve pas forcément au centre de la plaque. On appelle alors  $x_3$  l'abscisse du point d'application de  $V_3$ , qui sera déduite de l'équilibre du système.
- le poids de la poutre  $P_2$  : cet effort dépend de la géométrie de la poutre, le prédimensionnement sera donc réalisé en négligeant cette force et nous vérifierons a posteriori la validité de cette hypothèse.

Après calcul, nous avons trouvé que ce sont les efforts créés dans le cas de l'essai TRAFIC qui sont dimensionnants et qu'un assemblage de **deux poutres HE180AA** était la solution la plus légère et la moins encombrante pour vérifier les critères de résistance de la section et de résistance en fatigue. Le détail des calculs de dimensionnement est présenté dans l'annexe A.

### 8.1.2 Chargement horizontal

Nous avons vu qu'il était nécessaire d'appliquer une charge horizontale sur l'éprouvette pour reproduire l'état de compression dans la couche bitumineuse lors du passage d'un poids lourd. Nous proposons d'appliquer cette charge grâce à un vérin pneumatique et à un système mécanique de type "bras de levier" permettant de tripler l'amplitude de la charge fournie par le vérin (Fig. 8.5).

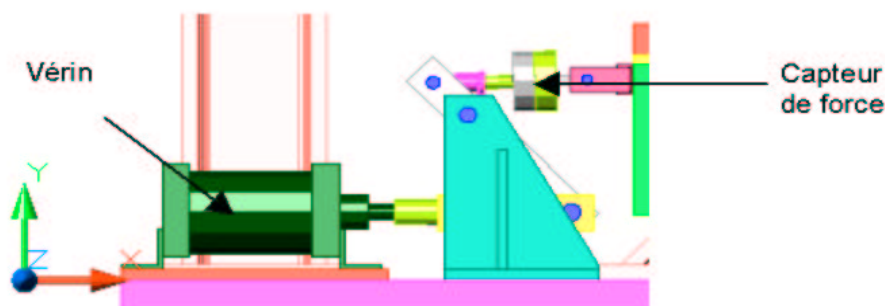


FIGURE 8.5. Dispositif de type "bras de levier" d'application de la charge horizontale

Le vérin pneumatique utilisé est fabriqué par la société FESTO et est de type DNG-160-PPVA (Tab. 8.2). C'est un actionneur qui permet de transformer l'énergie de l'air comprimé en un travail mécanique. Le vérin choisi est un vérin à double effet, c'est-à-dire qu'il peut développer une force disponible à l'aller comme au retour du piston.

Diamètre du piston	160	mm
Pression de service	0.6 – 10	bar
Force théorique sous 6bar, au recul	11310	N
Force théorique sous 6bar, à l'avance	12064	N

TABLEAU 8.2. Caractéristiques principales du vérin pneumatique

Afin de distribuer l'énergie en pression et en débit de façon constante, la mise en place d'un composant appelé "distributeur" entre la source d'énergie et les organes moteurs, est nécessaire. Dans notre cas, le distributeur utilisé est un électrodistributeur FESTO fermé au repos de type MFH-5/3G-1/8-B.

La force fournie par ce vérin est appliquée à l'extrémité d'une pièce en acier, rotulée au trois quarts de sa longueur, et reliée à son autre extrémité au dispositif d'application de la charge sur l'éprouvette : c'est le système de type "bras de levier" (Fig. 8.5). Le dimensionnement suivant l'Eurocode 3 (Dimensionnement des structures en acier) [CEN, 1992] des boulons permettant le fonctionnement de ce dispositif, conduit à une vérification de la résistance de la section et de la résistance en fatigue.

La charge horizontale imposée pour l'essai TRAFIC n'étant pas encore déterminée, nous choisissons de dimensionner ces pièces en considérant uniquement la charge imposée  $H_1(t)$  dans l'essai SIFIRE.

Nous avons déjà vu que la résistance de la section par rapport à un effort de cisaillement est vérifiée à partir de la relation (A.7). Pour un boulon de diamètre  $\phi = 25mm$  et de limite d'élasticité  $f_y = 640MPa$ , l'effort de cisaillement limite est :

$$V_{pl,Rd} = \frac{A_v \cdot f_y}{\sqrt{3} \cdot \gamma_{M0}} = 181kN$$

Etant donné que l'effort maximal imposé est  $\max(H_1(t)) = 26.6kN$ , nous pouvons conclure que le boulon résiste bien à cet effort.

Considérons à présent le chargement en fatigue. D'une part, d'après l'Eurocode 3, nous pouvons considérer que les boulons considérés appartiennent à la catégorie d'amplitude de cisaillement  $\Delta\tau_C = 100MPa$ . Pour un nombre de cycles  $N_R = 15.10^6$ , cette catégorie correspond à une résistance en fatigue  $\Delta\tau_R = 67MPa$ . D'autre part, l'effort de cisaillement imposé à une amplitude maximale égale à  $\Delta H_1(t) = 28.4kN$ , ce qui correspond à une variation de contrainte de cisaillement :

$$\Delta\tau_E = \frac{\Delta Q}{A_v} = 57.9MPa$$

L'inégalité (A.10) est donc bien vérifiée et des boulons de diamètre  $\phi = 25mm$  sont suffisants pour reprendre les efforts de cisaillement au niveau du bras de levier.

### 8.1.3 Pilotage des vérins

Le système hydraulique est commandé et contrôlé par un capteur de pression et un capteur de position LVDT intégrés dans la tête de chacun des deux vérins. Les mouvements de ces deux vérins sont pilotés de façon indépendante l'un de l'autre par une boucle d'asservissement et grâce à une servo-valve chacun.

Le pilotage des vérins et l'acquisition des données issues des capteurs se font à l'aide d'un ordinateur muni d'une carte d'acquisition et d'un logiciel de développement d'application (LabVIEW). L'asservissement est réalisé en déplacement afin d'obtenir un signal plus propre, mais contrôlé en force : le programme compare à chaque cycle la force mesurée au niveau de chaque vérin à la force imposée. Une correction de signe et d'intensité variable suivant l'écart mesuré est ensuite appliquée.

Le vérin pneumatique est commandé par un électrodistributeur relié à l'ordinateur par l'intermédiaire d'une carte d'acquisition. Le contrôle de la force imposée sur l'éprouvette est réalisé grâce à un capteur de force intermédiaire.

### 8.1.4 Métrologie

Les caractéristiques viscoélastiques des matériaux bitumineux font qu'il est important de tester les éprouvettes à température constante. Nous avons ainsi choisi de placer l'essai dans une enceinte thermique à l'intérieur de laquelle la température est maintenue constante à  $10^\circ C$  grâce à un climatiseur auto-régulé. Pour contrôler ce paramètre nous utilisons trois capteurs de température (thermocouples de type K) : deux d'entre eux sont placés à l'intérieur de l'éprouvette et le troisième à l'intérieur de l'enceinte. Nous pouvons ainsi vérifier que la température est constante à tout instant et ajuster la climatisation manuellement en cas de dérive.

La propagation de la fissure au sein de la couche bitumineuse est mesurée grâce à une jauge de fissuration placée de chaque côté de l'éprouvette au droit de la fissure artificiellement créée dans la couche en béton. Le principe des jauges de fissuration a déjà été exposé dans le chapitre 5 : c'est un réseau de fils conducteurs, solidaire de l'éprouvette par collage et relié à une centrale d'acquisition. Au fur et à mesure de l'avancée de la fissure à travers l'éprouvette, les fils se rompent l'un après l'autre et la centrale d'acquisition enregistre à chaque instant quels sont les fils cassés et donc à

quelle hauteur se situe la fissure. Deux importantes améliorations techniques ont été apportées aux jauges utilisées pour les essais de retrait-flexion (Fig. 8.6) :

- la jauge a une longueur plus importante ( $30\text{cm}$ ) afin d'augmenter la probabilité que la fissure passe à travers le réseau de fils conducteurs,
- l'espacement entre chaque fil est diminué ( $1\text{mm}$ ) sur le premier quart de la hauteur de la jauge afin de connaître de façon plus précise l'avancée de la fissure au bas des couches saines ; cet espacement est plus important ( $5\text{mm}$ ) sur les trois autres quarts car nous estimons que la propagation dans cette partie est plus rapide et apporte moins d'information sur l'efficacité des systèmes retardateurs de fissuration.

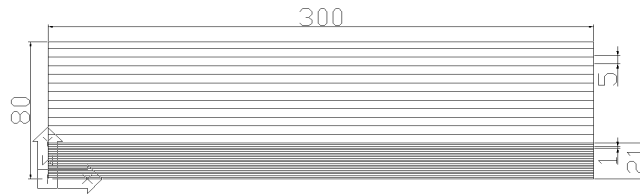


FIGURE 8.6. *Schema du réseau de fils des nouvelles jauges de fissuration*

Avant leur mise en place dans la couche d'enrobé coulé à froid, les grilles de type solution ARCELOR ont été équipées de 8 jauges de déformation (jauges KYOWA  $120\Omega$  de  $4\text{mm}$  de longueur - Fig. 8.7). Ces jauges ont la particularité de supporter des températures supérieures à  $160^\circ\text{C}$ , température à laquelle l'enrobé est mis en place.

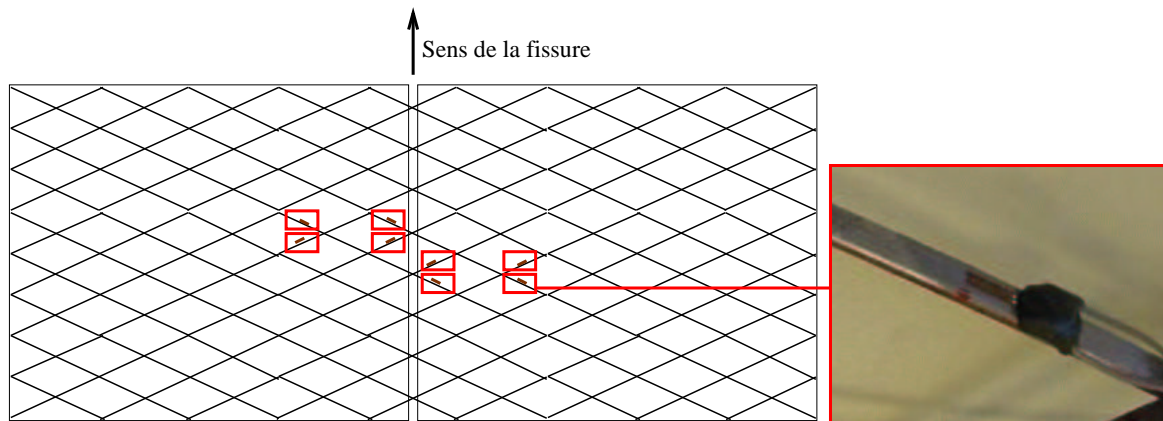


FIGURE 8.7. *Schéma du positionnement des 8 jauges de déformation sur la grille de type solution ARCELOR*

Les données issues de ces capteurs sont traitées par des conditionneurs et l'acquisition des mesures est effectuée grâce à deux cartes d'acquisition NI6023 et NI6024 ( $2 \times 16$  voies de mesure non différentielles), communes au pilotage des vérins, et un ordinateur équipé de l'environnement LabVIEW. Nous avons besoin d'une voie de mesure pour chaque capteur : trois voies pour les capteurs de température et huit voies pour les jauges de déformation. Les jauges de fissuration sont un cas particulier. A priori, il est nécessaire de compter une voie de mesure pour chacun des 32 fils du réseau, ce qui conduit à 64 voies de mesure et donc un nombre de cartes d'acquisition trop important. Pour remédier à ce problème, un montage électronique de type multiplexage a été réalisé (Fig. 8.8) : il consiste à relier tous les fils d'une jauge de fissuration sur une même voie de mesure et à relever la tension sur chaque fil successivement. Toutes les mesures ne sont donc pas simultanées mais ces écarts de temps sont négligeables par rapport à l'échelle de temps de l'essai (environ 1 semaine).



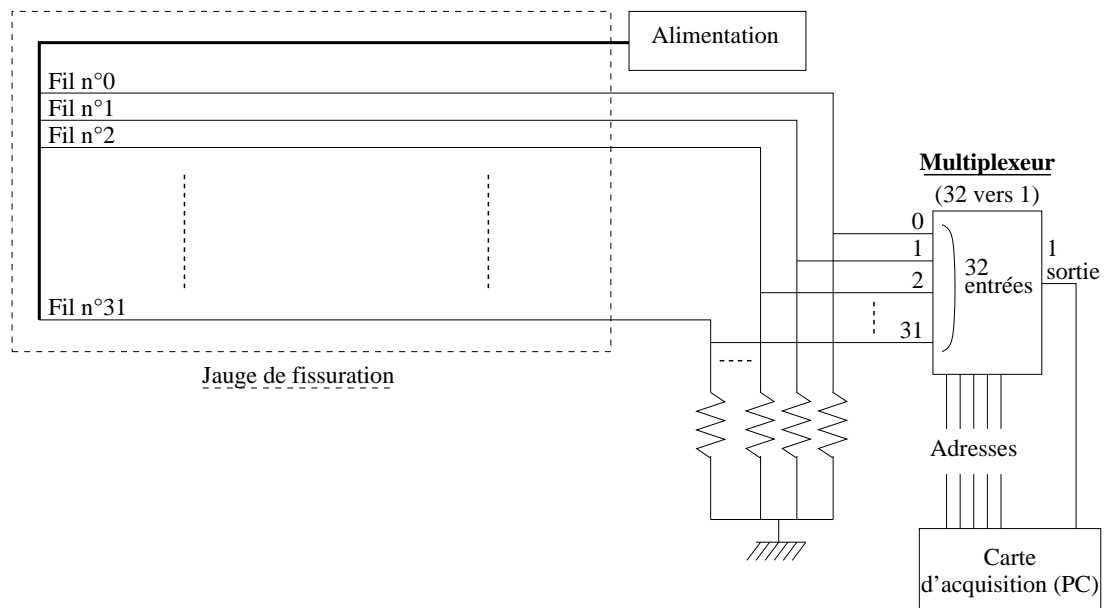


FIGURE 8.8. *Schema de principe du multiplexage réalisé pour récupérer les mesures sur une jauge de fissuration*

En résumé, alors que la climatisation est un élément indépendant du système, l'ensemble des capteurs et des activateurs est relié aux cartes d'acquisition de l'ordinateur par l'intermédiaire de distributeurs et de conditionneurs (Fig. 8.9).

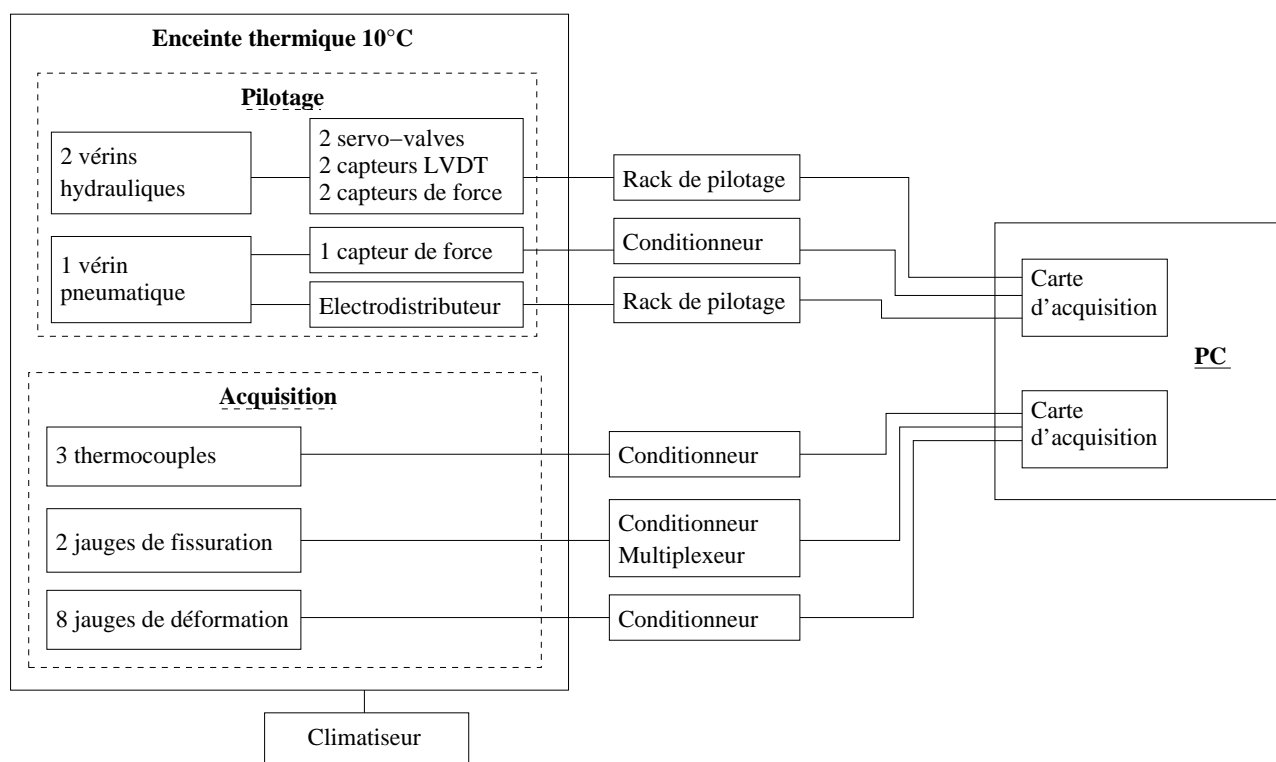


FIGURE 8.9. *Schema de principe du système de pilotage et d'acquisition des données*

## 8.2 Fabrication des éprouvettes

La géométrie et la composition des éprouvettes pour l'essai SIFIRE ont été décrites au chapitre 7. Comme elles diffèrent de celles des éprouvettes traditionnelles (de type retrait-flexion par exemple), leur fabrication a nécessité le développement d'une procédure d'élaboration à laquelle cette section est consacrée.

Nous avons vu dans le chapitre 7 que les éprouvettes sont des parallélépipèdes ( $1.00m \times 0.50m \times 0.38m$ ) multicouches :

- la couche inférieure est réalisée en béton hydraulique et présente une fissure transversale à la moitié de sa longueur,
- la couche intermédiaire comprend le système retardateur de fissuration à tester ; cette couche est saine, sans fissure,
- la couche de roulement est en béton bitumineux, elle est continue, sans fissure.

Etant donnée la taille conséquente des éprouvettes, il a été nécessaire de mettre en oeuvre des moyens de fabrication de chantier (finisseur, compacteur). Aussi nous avons mis au point une procédure pour l'élaboration simultanée de 15 éprouvettes. Cette procédure a été mise en oeuvre au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC) à Nantes.

### 8.2.1 Couche inférieure

La couche inférieure traitée aux liants hydrauliques est réalisée par coulage de béton dans un coffrage, dont le plan est présenté à la figure Fig. 8.10.

Trois essais de compression à 28 jours, sur des éprouvettes cylindriques  $16 \times 32cm$  nous ont permis de connaître la résistance en compression ( $30.4MPa$  en moyenne) de ce béton ordinaire et son module élastique ( $32.3GPa$  sur un seul essai). Le tableau Tab. 8.3 rassemble ces résultats.

Eprouvette	Age (jour)	Résistance à la compression (MPa)	Module élastique (GPa)
04-040	28	30.7	Non fait
04-041	28	30.3	Non fait
04-042	28	30.3	32.3

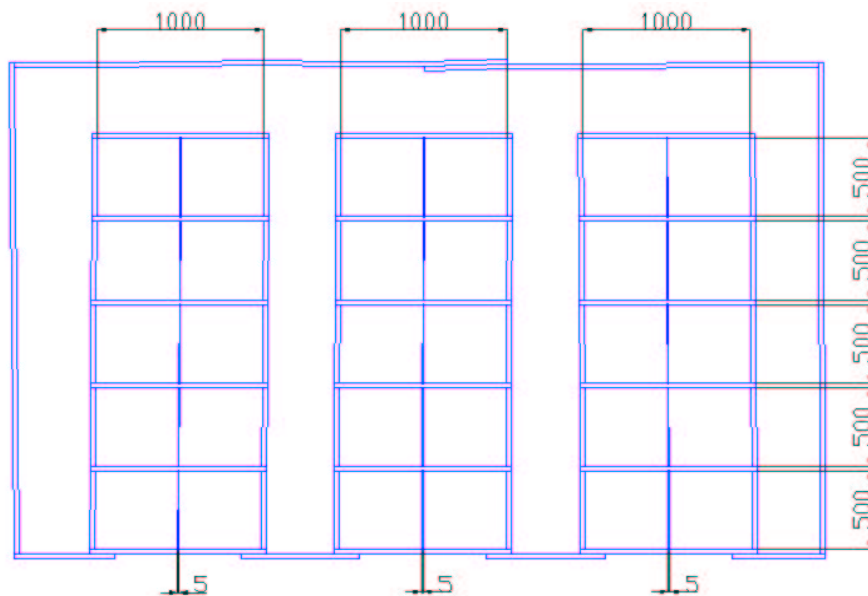
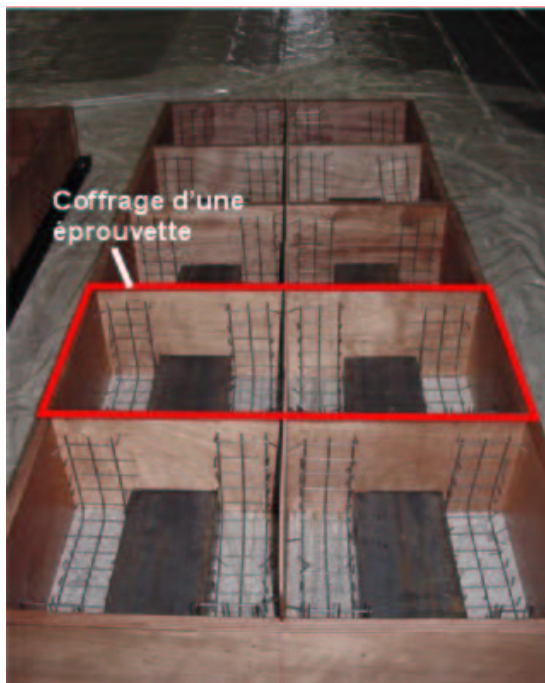
TABLEAU 8.3. Résultats des essais de compression d'éprouvettes en béton

Les fissures sont réalisées de façon artificielle en insérant une planche en contreplaqué de  $5mm$  d'épaisseur à mi-longueur de chaque éprouvette. Les éprouvettes devant être déplacées et équipées de dispositifs d'appui et d'encastrement, il a été nécessaire d'armer cette couche et de la munir de profils en U en fond de couche pour passer les fourches du chariot de manutention (Fig. 8.11(a)).

### 8.2.2 Couche intermédiaire

Après la période de mûrissement du béton de 28 jours, les couches supérieures ont été mises en place par rangée de cinq éprouvettes, sur une couche d'accrochage en émulsion de bitume (Fig. 8.12).

De gauche à droite sur la photo (Fig. 8.12), la première rangée correspond aux éprouvettes témoins, la couche de roulement est donc mise en place directement sur la couche d'émulsion sans couche intermédiaire. Les cinq éprouvettes constituant la seconde rangée sont équipées d'un système retardateur de fissuration de type sable enrobé. Il est mis en oeuvre sur une épaisseur moyenne de  $2cm$  et sa formulation correspond à la formulation appelée *F2* pour les essais de

FIGURE 8.10. *Plan de coffrage des éprouvettes*

(a)



(b)

FIGURE 8.11. (a) *Armatures et réserves en fond de couche* ; (b) *Vue générale du coffrage rempli de béton*

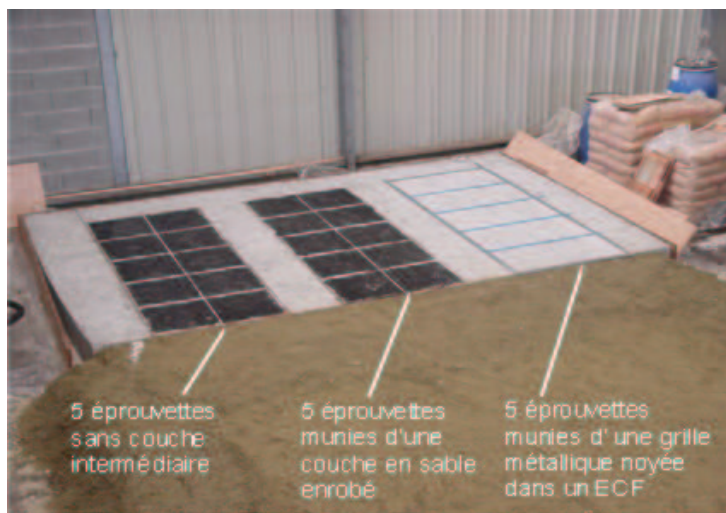


FIGURE 8.12. *Vue générale des éprouvettes après mise en place de l'émulsion*

retrait-flexion (Tab. 5.3), le bitume étant ici de type STYRELF 24/60. Enfin, les cinq dernières éprouvettes sont munies d'une grille métallique pour retarder la fissuration : la solution ARCELOR sur les trois éprouvettes centrales et la grille Mesh Track sur les deux extérieures. Ces grilles ont été directement posées sur la couche en béton, sans couche d'accrochage, et noyées dans une couche d'Enrobé Coulé à Froid (ECF) fabriqué en petites quantités et mise en place manuellement (Fig. 8.13). La formulation de l'ECF utilisé est la même que celle mise en oeuvre pour les éprouvettes de retrait-flexion et les planches d'essai FABAC (Tab. 5.6). L'épaisseur de ce système est d'environ 1cm.



FIGURE 8.13. *Mise en place de l'ECF sur une grille en acier*

Par ailleurs, dans la section précédente, nous avons vu que nous avons collé des jauges de déformation sur les grilles de type solution ARCELOR, afin d'apprécier leur degré de mobilisation lors de l'essai de fissuration SIFIRE (Fig. 8.7). Il était donc nécessaire de pouvoir sortir les fils soudés à ces jauges et de les protéger du sciage ultérieur de l'enrobé. Pour cela, nous avons réalisé des réserves dans le béton, sur les côtés des trois éprouvettes concernées (Fig. 8.14). Une fois les grilles mises en place les fils ont été enroulés dans ces réserves, elles mêmes recouvertes d'une

planche en contre-plaqué.



FIGURE 8.14. *Réserves recouvertes d'une planche dans lesquelles sont enfermés les fils reliés aux jauges*

### 8.2.3 Couche de roulement

La couche supérieure de roulement est en béton bitumineux. La formulation choisie est la même que celle utilisée pour les éprouvettes de retrait-flexion et les planches d'essai FABAC (Tab. 5.9). Son épaisseur est variable selon les éprouvettes afin d'obtenir toujours une épaisseur cumulée de la couche intermédiaire et de la couche supérieure de 8cm.

Les couches à base de liant hydrocarboné comme le béton bitumineux de la couche de roulement ou le sable enrobé de la couche intermédiaire pour cinq éprouvettes ont été fabriquées dans la centrale de fabrication du LCPC. Leur mise en place a demandé l'intervention d'un finisseur et d'un compacteur (Fig. 8.15).

Les éprouvettes ont été ensuite sciées et extraites des coffrages (Fig. 8.16). Afin de ne pas provoquer une propagation précoce de la fissuration dans les couches supérieures, les blocs de béton ont été solidarités à l'aide de croisillons en acier.





(a)



(b)

FIGURE 8.15. (a) Mise en place de l'enrobé bitumineux au finisseur; (b) Compactage de la couche



(a)



(b)

FIGURE 8.16. (a) Sciage des éprouvettes; (b) Extraction des éprouvettes du coffrage

### 8.3 Situation actuelle de la campagne d'essais SIFIRE

Au moment de la rédaction de ce mémoire, le bâti d'essai était réalisé (Fig. 8.17) et la phase de mise au point des moyens de pilotage et d'acquisition était en cours d'achèvement.



FIGURE 8.17. *Bâti d'essai SIFIRE et éprouvette mise en place*

Deux principaux points nécessitent encore une attention particulière. D'une part, il s'agit du couplage des vérins hydrauliques. En effet, ces deux vérins exercent leur effort sur la même poutre. Aussi, l'action de l'un crée une réaction sur l'autre. Le pilotage des vérins doit prendre en compte cette interaction et la programmation s'en trouve donc alourdie.

D'autre part, nous avons vu dans le paragraphe 7.3.3 que les fonctions de référence présentent une grande sensibilité aux charges appliquées. Il est donc important que les signaux d'efforts du vérin pneumatique et des deux vérins hydrauliques soient en phase. Ce point demande donc une grande précision du pilotage programmé.

## Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre les caractéristiques techniques des dispositifs mis en oeuvre sur le bâti d'essai SIFIRE. Les moyens de mesure et de pilotage spécifiques à cet essai sont également des points importants de l'essai que nous avons voulu détailler dans la première section de ce chapitre.

La procédure originale de fabrication des éprouvettes fait l'objet de la seconde partie. Elle a l'avantage de permettre la réalisation simultanée de 15 éprouvettes mais demande des moyens techniques relativement lourds.



Enfin, la troisième section fait le point sur la situation de la campagne d'essais au moment de la rédaction de ce mémoire. La phase de mise au point des moyens de pilotage est en cours d'achèvement et les premières éprouvettes devraient être testées dans peu de temps.



# Conclusion de la deuxième partie

La fissuration réfléctive est un endommagement caractéristique des chaussées semi-rigides. Ces structures sont composées d'une assise en matériaux traités aux liants hydrauliques et d'une couche de roulement en matériaux bitumineux. Les fissures de retrait qui se développent rapidement dans les matériaux traités aux liants hydrauliques provoquent des concentrations de contrainte à l'interface entre la couche d'assise et la couche de roulement. Cette configuration a pour conséquence l'initiation de la fissuration dans la couche bitumineuse et sa propagation jusqu'à la surface.

Dans cette partie, nous avons réalisé un état de l'art sur le phénomène de fissuration réfléctive et sur les solutions d'entretien et de réparation permettant de remédier à ce défaut. Nous avons spécialement porté notre attention sur les solutions de type interfaces (souples ou rigides). Ce sont des systèmes de faible épaisseur placés en tête des discontinuités, c'est-à-dire à l'interface entre la couche de roulement et la couche d'assise. Selon leurs caractéristiques de raideur, ils agissent différemment pour ralentir la phase d'initiation et/ou de propagation des fissures. Les interfaces souples ont pour rôle de dissiper les contraintes au niveau des discontinuités, alors que les interfaces rigides permettent de renforcer la couche supérieure mais aussi de ponter la fissure lorsque celle-ci a déjà atteint la couche bitumineuse.

A partir des caractéristiques des solutions existantes, nous avons pu définir quelles devaient être les propriétés d'une interface retardatrice de fissuration efficace. Plus particulièrement, pour que les systèmes rigides jouent bien leur rôle de renfort, il est important que l'accrochage avec la couche supérieure soit de bonne qualité. Nous avons vu également que les grilles métalliques donnaient de bons résultats mais que les maîtres d'ouvrage leur reprochaient leur coût élevé et leur difficulté de mise en place. Sur ces deux points, la nouvelle solution retardatrice de fissuration développée par le groupe ARCELOR, est innovante. En effet, alors que sa structure tridimensionnelle la dote de bonnes qualités d'accrochage et devrait lui permettre de concurrencer les solutions existantes au niveau des performances, son procédé de fabrication original permet de réduire sensiblement le coût de la grille. De plus, ce produit présente une plus grande rigidité de flexion que les grilles existantes de type Mesh Track. La mise en place est donc plus aisée : les risques de plis ou de problèmes de planéité sont quasiment nuls, la mise en oeuvre dans les virages ou les réparations locales sont améliorées par la facilité de sa découpe à la pince. Sa structure plus rigide et l'absence de liaison par tressage devrait également la rendre moins sensible au compactage que le Mesh Track.

Par contre, l'inconvénient lié à toutes les solutions en acier est le problème lié à la déconstruction. Les fraiseuses utilisées usuellement sont endommagées si elles sont utilisées pour ôter des chaussées avec renfort en acier. Pour le moment, aucune méthode adaptée n'est proposée aux maîtres d'ouvrage.

En vue d'évaluer les performances de la nouvelle solution, nous avons poursuivi notre étude bibliographique sur l'analyse des moyens expérimentaux caractérisant les performances des techniques mettant en oeuvre une interface. Après avoir sélectionné deux essais représentatifs des différents dispositifs existants, nous avons décidé de les utiliser pour effectuer une première évaluation des performances de la solution ARCELOR en comparaison avec quelques solutions existantes. D'une part, la campagne d'essais de retrait-flexion nous a conduits à des résultats encourageants du point de vue des performances de la solution ARCELOR mais qui restent très qualitatifs étant

donnée la taille inadaptée des éprouvettes. D'autre part, la campagne d'essais FABAC a juste débuté au moment de la rédaction de ce mémoire. Elle nous a déjà permis d'observer une bonne mise en place de la grille à une échelle quasi-réelle mais ne nous permet pas encore de conclure quant à son efficacité.

Ces campagnes nous ont donc fourni les premiers éléments de réponse quant à la faisabilité et aux performances de la solution ARCELOR, mais aussi une meilleure vision des besoins expérimentaux dans ce domaine. En effet, l'essai de retrait-flexion et l'essai FABAC sont des moyens expérimentaux définis par des échelles de temps et de taille différentes. Alors que le premier teste des éprouvettes de quelques dizaine de centimètres pendant une dizaine d'heures, le second consiste à solliciter des planches d'essai de quelques mètres pendant plusieurs semaines. Ce dernier permet donc de simuler le fonctionnement d'une chaussée de façon plus représentative mais demande un investissement en temps plus conséquent. Ainsi, un essai défini par des échelles de temps et de taille intermédiaires, devrait permettre de compléter efficacement la chaîne des étapes de validation et d'optimisation d'un nouveau procédé.

C'est dans ce cadre que le développement de l'essai SIFIRE a été décidé. C'est un essai de laboratoire qui doit permettre de simuler les effets de structure propres au fonctionnement d'une chaussée fissurée soumise à des chargements cycliques. L'originalité du dimensionnement de cette expérience est de transposer sur une éprouvette les variations de grandeurs de référence calculées pour une chaussée complète. Ainsi nous avons étudié de façon détaillée les champs de contrainte et de déformation dans une chaussée semi-rigide fissurée et nous en avons déduit quatre fonctions particulières qui permettent de caractériser le fonctionnement de cette structure. Nous avons ensuite pu dimensionner les dispositifs expérimentaux nécessaires pour solliciter l'éprouvette de façon à y reproduire les fonctions de référence. L'essai consiste donc à solliciter une éprouvette, placée en poutre console, à l'aide de deux vérins verticaux et un vérin horizontal. Le pilotage de ces trois vérins est réalisé grâce à une boucle d'asservissement classique utilisant des capteurs, des racks de pilotage et un carte d'acquisition. Au moment de la rédaction de ce mémoire, la phase de mise au point de ces moyens complexes est en cours d'achèvement.

La suite du projet consistera bien sûr en la réalisation de la campagne d'essais SIFIRE programmée. Les résultats obtenus associés aux conclusions déduites des deux campagnes précédentes (essais de retrait-flexion et essais FABAC) devraient fournir des conclusions intéressantes concernant l'efficacité de la nouvelle solution ARCELOR proposée. Des tests sur chantier de mise en place de cette solution seront alors envisageables.

Par ailleurs, la comparaison des résultats des essais FABAC et SIFIRE permettra de valider ce nouvel essai. Par la suite, des campagnes couplant des essais de retrait-flexion et des essais SIFIRE seront réalisables et donneront la possibilité de procéder à l'optimisation de nouvelles interfaces retardatrices de fissuration avec des moyens de laboratoire.

L'utilisation de l'essai SIFIRE a été limitée dans le cadre de cette thèse à la simulation de la charge de trafic. Nous avons vu dans le chapitre consacré au dimensionnement qu'une extension de la démarche aux sollicitations thermiques était envisageable. La détermination des fonctions de référence dans ce cas pourrait donc être réalisée et permettre la définition des signaux de chargements à appliquer sur l'éprouvette. L'étude expérimentale des deux cas de chargements (trafic et variations thermiques) ainsi que de leur combinaison pourrait permettre de mieux comprendre l'incidence de chacun d'entre eux sur la fissuration réflexive.

Notons également que les premières idées directrices d'un nouvel essai de roulement appelé TRAFIC, ont été données dans cette partie. L'originalité de cet essai se situe au niveau de sa structure de type hachoir composée de deux vérins et d'une poutre courbe. En effet celle-ci permet de simuler le passage de poids lourds à une vitesse de  $70\text{km/h}$  sans accélération ni décélération. Le domaine de recherche intéressé par cet essai comprend l'étude de l'orniérage, de l'arrachage des matériaux de surface mais aussi l'étude des couches de roulement minces. Le dimensionnement de

cet essai demande à être complété. Il pourrait être réalisé suivant la méthode adoptée pour l'essai SIFIRE. Un calcul de chaussée caractéristique du problème étudié devrait permettre de définir un certain nombre de grandeurs de référence à reproduire dans l'éprouvette testée ; les dispositifs de l'essai TRAFIC pourraient être alors dimensionnés pour atteindre cet objectif.



# Bibliographie

- [6DSolutions, 2001] 6DSOLUTIONS . *Roadtex, Rotaflex et Cidex : grilles de fibre de verre pour renforcement d'enrobé*. Rapport technique, 2001.
- [Al-Qadi et Elseifi, 2004] AL-QADI I.L. et ELSEIFI M.A. Field installation and design considerations of steel reinforcing netting to reduce reflection of cracks. *5<sup>th</sup> International RILEM Conference on Cracking in Pavements - Mitigation, Risk Assessment and Prevention*. Edited by PETIT C., AL-QADI I.L. et MILLIEN A. 2004, pp. 97–104.
- [Antunes et al., 2004] ANTUNES M.L., v DOMMELEN A., SANDERS P., BALAY J.M. et GAMIZ E.L. Maintenance of cracked pavements with the format project. *5<sup>th</sup> International RILEM Conference on Cracking in Pavements - Mitigation, Risk Assessment and Prevention*. Edited by PETIT C., AL-QADI I.L. et MILLIEN A. 2004, pp. 45–52.
- [Autret et al., 1982] AUTRET P., B. D BOISSOUDY A. et MARCHAND J.P. Alize iii practice. *Proc. 5th int. Conf. Structural Design of Asphalt Pavements*, 1982, pp. 174–191.
- [Ballié, 2004] BALLIÉ M. Complexe anti-fissure d'efficacité démontrée à base de treillis métalliques et d'enrobés bitumineux. *5<sup>th</sup> International RILEM Conference on Cracking in Pavements - Mitigation, Risk Assessment and Prevention*. Edited by PETIT C., AL-QADI I.L. et MILLIEN A. 2004, pp. 113–120.
- [Baucheron de Boissoudy et George, 1988] B. D BOISSOUDY A. et GEORGE L.A. *Actualisation du catalogue des structures de 1977 et du guide dimensionnement des renforcements, Note ALIZE*. Rapport technique, LCPC-SETRA, 1988.
- [BEKAERT, 2002] BEKAERT . *Bitufor : un système combiné pour la réfection des chaussées*. Rapport technique, 2002.
- [Bodin, 2002] BODIN D. *Modèle d'endommagement cyclique : Application à la fatigue des enrobés bitumineux*. Thèse : Ecole Centrale de Nantes, 2002.
- [Bouchitté, 1987] BOUCHITTÉ G. Convergence et relaxation de fonctionnelles du calcul des variations à croissance linéaire. application à l'homogénéisation en plasticité. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1986-1987, vol 8, pp. 7–36.
- [Bourada et Chateau, 1997] BOURADA N. et CHATEAU X. Détermination du critère de rupture d'un milieu granulaire par homogénéisation périodique. *13<sup>eme</sup> Congrès Français de Mécanique - Poitiers, France*. 1997, pp. 149–152.
- [Brown et Brunton, 1989] BROWN S.F. et BRUNTON J.M. Grid reinforced overlays. *1<sup>th</sup> International RILEM Conference on Reflective Cracking in Pavements - Assessment and Control*. Edited by RIGO J.M. et DEGEIMBRE R. 1989, pp. 63–70.
- [Burmister, 1943] BURMISTER D.M. The theory of the stresses and displacements in layered sustems and applications of design of airport runway. *Proceeding of the Highway Research Board*, 1943, vol 23, pp. 126–148.
- [CEN, 1992] CEN . *Eurocode 3 - Calcul des structures en acier*. Comité Européen de Normalisation, 1992.

- [Chabot et Ehrlacher, 1998] CHABOT A. et EHRLACHER A. Modèles multiparticulaires de matériaux multicouches pour l'étude des effets de bords. *Comptes-rendus aux 11<sup>ème</sup> journées nationales sur les composites (JNC11)*. 1998, pp. 1389–1397.
- [Chabot, 1997] CHABOT A. *Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modélisations Multiparticulaires des Matériaux Multicouches M4*. Thèse : Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
- [Chateau et al., 2002] CHATEAU X., MOUCHERONT P. et PITOIS O. Micromechanics of unsaturated granular media. *Journal of engineering mechanics*, 2002, vol 128, pp. 856–863.
- [Chen et al., 1999] CHEN C., LU T.J. et FLECK N.A. Effect of imperfections on the yielding of two-dimensional foams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1999, vol 47, pp. 2235–2272.
- [Clauwaert et Francken, 1989] CLAUWAERT C. et FRANCKEN L. Etude et observation de la fissuration réfléctive au centre de recherches routières belge. *1<sup>th</sup> International RILEM Conference on Reflective Cracking in Pavements - Assesment and Control*. Edited by RIGO J.M. et DEGEIMBRE R. 1989, pp. 170–181.
- [Colombier, 1997] COLOMBIER G. Cracking in pavements : nature and origin of cracks. *Prevention of Reflective Cracking in Pavements - RILEM Report 18*. Edited by VANELSTRAETE A. et FRANCKIEN L. 1997, pp. 1–15.
- [CRR, 1995] CRR . *Interfaces antifissures*. Rapport technique, CRR, 3<sup>ème</sup> trimestre 1995.
- [De Beer et al., 1997] DE BEER M., FISHER C. et JOOSTE F. Determination of pneumatic tyre/pavement interface stresses under moving loads and some effects on pavements with thin asphalt surfacing layers. *8<sup>th</sup> International Conference on Asphalt Design*. 1997.
- [de Bondt et Scarpas, 1994] D BOND T A.H. et SCARPAS A. *Theoretical Analysis of Shear Interface Test Set-Ups*. Delft University of Technology, 1994.
- [De Buhan, 1986] DE BUHAN P. *Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés*. Thèse : Paris VI, 1986.
- [De La Roche, 1996] DE LA ROCHE C. *Module de rigidité et comportement en fatigue des enrobés bitumineux*. Thèse : Ecole Centrale Paris, 1996.
- [Di Benedetto et al., 1993] DI BENEDETTO H., NEJI J., ANTOINE J.P. et PASQUIER M. Apparatus for laboratory study of cracking resistance. *2<sup>th</sup> International RILEM Conference on Reflective Cracking in Pavements - State of the Art and Design Recommendations*. Edited by RIGO J.M., DEGEIMBRE R. et FRANCKEN L. 1993, pp. 179–186.
- [Dumas et Vecoven, 1993] DUMAS P. et VECOVEN J. Processes reducing reflective cracking ; synthesis of laboratory tests. *2<sup>th</sup> International RILEM Conference on Reflective Cracking in Pavements - State of the Art and Design Recommendations*. Edited by RIGO J.M., DEGEIMBRE R. et FRANCKEN L. 1993, pp. 246–253.
- [Ekeland et Temam, 1976] EKELAND I. et TEMAM R. *Convex Analysis and Variational Problems*. 1976.
- [Ellis et Dudgeon, 2004] ELLIS S. et DUDGEON R. Pre-cracking as a technique to minimise reflection cracking in semi-rigid pavement structures - long term performance monitoring. *5<sup>th</sup> International RILEM Conference on Cracking in Pavements - Mitigation, Risk Assesment and Prevention*. Edited by PETIT C., AL-QADI I.L. et MILLIEN A. 2004, pp. 325–332.
- [Fazekas et al., 2002] FAZEKAS A., DENDIEVEL R., SALVO L. et BRECHET Y. Effect of microstructural topology upon the stiffness and strength of 2d cellular structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2002, vol 44, pp. 2047–2066.
- [Florence et Sab, 2005] FLORENCE C. et SAB K. Overall ultimate yield surface of periodic tetra-kaidecahedral lattices with non-symmetric material distribution. *Journal of Materials Science*, 2005. à paraître.



- [Florence et Sab, 2005] FLORENCE C. et SAB K. A rigorous homogenization method for the determination of the overall ultimate yield strength of periodic discrete media and an application to honeycomb materials with arbitrary non-uniform cell wall thickness. 2005. soumis.
- [Fock, 1989] FOCK G. The use of paving felts to influence the life expectancy and permanent adhesion of asphalt road surfaces. *1<sup>th</sup> International RILEM Conference on Reflective Cracking in Pavements - Assessment and Control*. Edited by RIGO J.M. et DEGEIMBRE R. 1989, pp. 95–102.
- [Foulkes et Kennedy, 1986] FOULKES M.D. et KENNEDY C.K. The limitations of reflection cracking in flexible pavements containing cement bound layers. *Proceedings of the International Conference on Bearing Capacity of Roads and Airfields - Plymouth*. 1986.
- [Gent et Thomas, 1963] GENT A.N. et THOMAS A.G. Mechanics of foamed elastic materials. *Rubber Chemistry and Technology*, 1963, vol 36, pp. 597–610.
- [Gibson et al., 1989] GIBSON L.J., ASHBY M.F., ZHANG J. et TRIANTAFILIOU T.C. Failure surfaces for cellular materials under multi-axial loads - (i) modeling. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1989, vol 31, pp. 635–665.
- [Gibson et Ashby, 1997] GIBSON L.J. et ASHBY M.F. *Cellular Solids : Structure and Properties*, 2nd ed. 1997.
- [Goacolou et Marchand, 1982] GOACOLOU H. et MARCHAND J.P. Fissuration des couches de roulement. *5<sup>eme</sup> Conférence internationale sur les chaussées bitumineuses*. 1982.
- [Grenestedt et Bassinet, 2000] GRENESTEDT J.L. et BASSINET F. Influence of cell wall thickness variations on elastic stiffness of closed-cell cellular solids. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2000, vol 42, pp. 1327–1338.
- [Grenestedt et Tanaka, 1999] GRENESTEDT J.L. et TANAKA K. Influence of cell shape variations on elastic stiffness of closed cell cellular solids. *Scripta Materialia*, 1999, vol 40, pp. 71–77.
- [Grenestedt, 1998] GRENESTEDT J.L. Influence of wavy imperfections in cell walls on elastic stiffness of cellular solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, vol 46, pp. 29–50.
- [Grzybowska et al., 1993] GRZybOWSKA W., WOJTOWCZ J. et FONFERKO L. Application of geosynthetics to overlays in cracow region of poland. *Proceedings of the 2nd RILEM-Conference on Reflective Cracking in Pavements, Liège*. 1993, pp. 290–298.
- [Irwin, 1957] IRWIN G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 1957, vol 24, pp. 361–364.
- [Jun et al., 2004] JUN Y., GUANHUA F., QING L., RONGSHENG C. et XUEJUN D. Deep analysis on interlayer restraining reflective cracks in asphalt overlay old concrete pavement. *5<sup>th</sup> International RILEM Conference on Cracking in Pavements - Mitigation, Risk Assessment and Prevention*. Edited by PETIT C., AL-QADI I.L. et MILLIEN A. 2004, pp. 223–230.
- [Kim et Al-Hassani, 2002] KIM H.S. et AL-HASSANI S.T.S. The effect of doubly tapered strut morphology on the plastic yield surface of cellular materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2002, vol 44, pp. 1559–1581.
- [Klintworth et Stronge, 1988] KLINTWORTH J. et STRONGE W. Elasto-plastic yield limits and deformation laws for transversely crushed honeycomb. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1988, vol 30, pp. 273–292.
- [Kraynik et al., 1991] KRAYNIK A.M., REINELT D.A. et PRINCEN H.M. The non-linear elastic behaviour of polydisperse hexagonal foams and concentrated emulsions. *Journal of Rheology*, 1991, vol 35, pp. 1235–1253.
- [Laroussi et al., 2002] LAROUSSE M., SAB K. et ALAOUÏ A. Foam mechanics : nonlinear response of an elastic 3d-periodic microstructure. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, vol 39, pp. 3599–3623.

- [LCPC-SETRA, 1994] LCPC-SETRA . *Conception et dimensionnement des structures de chaussée - Guide technique*, Décembre 1994.
- [LCPC-SETRA, 2000] LCPC-SETRA . *Aide à la gestion de l'entretien des réseaux routiers*. Rapport technique, LCPC-SETRA, 2000.
- [LCPC, 1964] LCPC . *Comportement statique des chaussées - Problèmes à symétrie axiale - Méthode de Burmister - Rapport n°2 du SEMA*. Rapport technique, LCPC-SEMA, 1964.
- [LCPC, 1988] LCPC . Fissuration de retrait de chaussées à assises traitées aux liants hydrauliques. *Bulletin de Liaison du LCPC*, 1988, vol 156-157, pp. 37–65 et 59–87.
- [LCPC, 1997] LCPC . *Relevé des dégradations de surface des chaussées*. Rapport technique, Méthode d'essai LPC n°38-2, 1997.
- [LCPC, 1998] LCPC . *Catalogue des dégradations de surface des chaussées*. Rapport technique, Méthode d'essai n°52, 1998.
- [Lee et Kim, 2004] LEE S.J. et KIM Y.R. Development of fatigue cracking test protocol and life prediction methodology using the third scale model mobile loading simulator. *5<sup>th</sup> International RILEM Conference on Cracking in Pavements - Mitigation, Risk Assessment and Prevention*. Edited by PETIT C., AL-QADI I.L. et MILLIEN A. 2004, pp. 29–36.
- [Leutner, 1979] LEUTNER R.L. Research on adhesion between layers of flexible pavements. *Bitumen* 3. 1979.
- [Lyttton, 1989] LYTTON R.L. Use of geotextiles for reinforcement and strain relief in asphalt concrete. *Geotextiles and Geomembranes*, 1989, vol 8, pp. 217–237.
- [Maillard et al., 2003] MAILLARD S., HAMMOUM F. et DE LA ROCHE C. Méthode expérimentale pour l'étude de la fissuration et de l'autoréparation des liants bitumineux. *16<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique*. 2003.
- [Mathews et Monismith, 1993] MATHEWS J.M. et MONISMITH C.L. Investigation of laboratory fatigue testing procedures for asphalt aggregate mixtures. *Journal of Transportation Engineering*, July-August 1993, vol 119-4, pp. 634–654.
- [Molenaar et Potter, 1997] MOLENAAR A.A.A. et POTTER J. Assesment and evaluation of the reflection crack potential. *Prevention of Reflective Cracking in Pavements - RILEM Report 18*. Edited by VANELSTRAETE A. et FRANCKIEN L. 1997, pp. 16–42.
- [Molenaar, 2004] MOLENAAR A.A.A. Bottom-up fatigue cracking : myth or reality? *5<sup>th</sup> International RILEM Conference on Cracking in Pavements - Mitigation, Risk Assessment and Prevention*. Edited by PETIT C., AL-QADI I.L. et MILLIEN A. 2004, pp. 275–282.
- [Montestruque et al., 2004] MONTESTRUQUE G., RODRIGUES R., NODS M. et ELSING A. Stop of reflective crack propagation with the use of pet geogrid as asphalt overlay reinforcement. *5<sup>th</sup> International RILEM Conference on Cracking in Pavements - Mitigation, Risk Assessment and Prevention*. Edited by PETIT C., AL-QADI I.L. et MILLIEN A. 2004, pp. 231–238.
- [Nesnas et Nunn, 2004] NESNAS K. et NUNN M. A model for top-down reflection cracking in composite pavements. *5<sup>th</sup> International RILEM Conference on Cracking in Pavements - Mitigation, Risk Assessment and Prevention*. Edited by PETIT C., AL-QADI I.L. et MILLIEN A. 2004, pp. 409–416.
- [Papka et Kyriakides, 1998] PAPKA S.D. et KYRIAKIDES S. Experiments and full-scale numerical simulations of in-plane crushing of a honeycomb. *Acta Materialia*, 1998, vol 46.
- [Patel et Finnie, 1970] PATEL M.R. et FINNIE I. Structural features and mechanical properties of rigid cellular plastics. *Journal of Materials*, 1970, vol 5, pp. 909–932.
- [Pouteau, 2004] POUTEAU B. *Durabilité mécanique du collage blanc sur noir dans les chaussées*. Thèse : Ecole Centrale de Nantes et Université de Nantes, 2004.

- [Pradel et Sab, 1998] PRADEL F. et SAB K. Cosserat modelling of elastic periodic lattice structures. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, II b*, 1998, vol 326, pp. 699–704.
- [Pradel, 1998] PRADEL F. *Homogénéisation des milieux discrets périodiques orientés. Une application aux mousses*. Thèse : Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1998.
- [Qi et al., 2004] QI X., MITCHELL T. et SHERWOOD J.A. Evaluation of utw fatigue cracking using fhwa's accelerated loading facility. *5<sup>th</sup> International RILEM Conference on Cracking in Pavements - Mitigation, Risk Assessment and Prevention*. Edited by PETIT C., AL-QADI I.L. et MILLIEN A. 2004, pp. 37–44.
- [Raithby et Sterling, 1972] RAITHBY K.D. et STERLING A.B. Laboratory fatigue tests on rolled asphalt and their relation to traffic loading. *Roads and Road Construction*, 1972, pp. 219–223.
- [REFLEX, 2002] REFLEX . *Reinforcement of Flexible Road Structures with Steel Fabrics to Prolong Service Life - Guidelines - Final Report T9 :02*. Rapport technique, BRITE/EURAM, 2002.
- [Sab, 1994] SAB K. Homogenization of non-linear random media by a duality method. application to plasticity. *Asymptotic Analysis*, 1994, vol 9, pp. 311–336.
- [Sab, 1996] SAB K. Déformations microscopiques et macroscopiques dans un assemblage dense de particules rigides. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, II b*, 1996, vol 322, pp. 715–721.
- [Salençon, 1990] SALENÇON J. An introduction to the yield design theory and its application to soil mechanics. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 1990, vol 9 (5), pp. 477–550.
- [Silva et al., 1995] SILVA M.J., HAYES W.C. et GIBSON L.J. The effect of non-periodic microstructure on the elastic properties of two-dimensional cellular solids. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1995, vol 37, pp. 1161–1177.
- [Silva et Gibson, 1997] SILVA M.J. et GIBSON L.J. The effects of non-periodic microstructure and defects on the compressive strength of two-dimensional cellular solids. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1997, vol 39, pp. 549–563.
- [Simone et Gibson, 1998] SIMONE A.E. et GIBSON L.J. The effect of solids distribution on the stiffness and strength of metallic foams. *Acta Materialia*, 1998, vol 46, pp. 2139–2150.
- [Simone et Gibson, 1998] SIMONE A.E. et GIBSON L.J. The effects of cell face curvature and corrugations on the stiffness and strength of metallic foams. *Acta Materialia*, 1998, vol 46, pp. 3929–3935.
- [Sobhan et al., 2004] SOBHAN K., CROOKS T., TANDON V. et MATTINGLY S. Laboratory simulation of the growth and propagation of reflection cracks in geogrid reinforced asphalt overlays. *5<sup>th</sup> International RILEM Conference on Cracking in Pavements - Mitigation, Risk Assessment and Prevention*. Edited by PETIT C., AL-QADI I.L. et MILLIEN A. 2004, pp. 589–596.
- [STBA, 1999] STBA . *Techniques anti-remontées de fissures - Guide d'emploi en chaussées aéronautiques*, Avril 1999.
- [Suquet, 1983] SUQUET P. Analyse limite et homogénéisation. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, II*, 1983, vol 296, pp. 1355–1358.
- [Tamagny et al., 2004] TAMAGNY P., WENDLING L. et PIAU J.M. A new explanation of pavement cracking from top to bottom : viscoelasticity of asphalt materials? *5<sup>th</sup> International RILEM Conference on Cracking in Pavements - Mitigation, Risk Assessment and Prevention*. Edited by PETIT C., AL-QADI I.L. et MILLIEN A. 2004, pp. 425–432.
- [TENSAR, 2002] TENSAR . *Chaussées souples : renforcement des couches bitumineuses dans les routes et autres zones sujettes à circulation*. Rapport technique, 2002.
- [T.I., 1992] T.I. . *Techniques de l'ingénieur C5500 - Projet et construction de routes*, Août 1992.

- [Titi et al., 2003] TITI H., RASOULIAN M., MARTINEZ M., BECNEL B. et KEEL G. Long-term performance of stone interlayer pavement. *Journal of Transportation Engineering*, 2003, vol 129, pp. 118–126.
- [Tran, 2004] TRAN Q.D. *Modèle simplifié pour les chaussées fissurées multicouches*. Thèse : Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2004.
- [Triantafyllidis et Schraad, 1998] TRIANTAFYLIDIS N. et SCHRAAD M.W. Onset of failure in aluminium honeycombs under general in-plane loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, vol 46, pp. 1089–1124.
- [Vanelstraete et al., 1997] VANELSTRAETE A., D BOND T A.H. et COURARD L. Characterization of overlay systems. *Prevention of Reflective Cracking in Pavements - RILEM Report 18*. Edited by VANELSTRAETE A. et FRANCKIEN L. 1997, pp. 61–83.
- [Vanelstraete et de Bondt, 1997] VANELSTRAETE A. et D BOND T A.H. Crack prevention and use of overlay systems. *Prevention of Reflective Cracking in Pavements - RILEM Report 18*. Edited by VANELSTRAETE A. et FRANCKIEN L. 1997, pp. 43–60.
- [Vanelstraete et De Visscher, 2004] VANELSTRAETE A. et DE VISSCHER J. Long term performance on site of interface systems. *5<sup>th</sup> International RILEM Conference on Cracking in Pavements - Mitigation, Risk Assessment and Prevention*. Edited by PETIT C., AL-QADI I.L. et MILLIEN A. 2004, pp. 699–706.
- [Vanelstraete et Francken, 1996] VANELSTRAETE A. et FRANCKEN L. Laboratory testing and numerical modelling of overlay systems on cement concrete slabs. *3<sup>th</sup> International RILEM Conference on Reflective Cracking in Pavements*. 1996, pp. 211–220.
- [Vecoven, 1989] VECOVEN J.H. Méthode d'étude de systèmes limitant la remontée de fissures dans les chaussées. *1<sup>th</sup> International RILEM Conference on Reflective Cracking in Pavements - Assessment and Control*. Edited by RIGO J.M. et DEGEIMBRE R. 1989, pp. 57–62.
- [Warren et Kraynik, 1987] WARREN W. E. et KRAYNIK A.M. Foam mechanics : the linear elastic response of two-dimensional spatially periodic cellular materials. *Mechanics of Materials*, 1987, vol 6, pp. 27–37.
- [Yamaoka et al., 1989] YAMAOKA I., YAMAMOTO D. et HARA T. Laboratory fatigue testing of asphalt concrete pavements containing fabric interlayers and field. *1<sup>th</sup> International RILEM Conference on Reflective Cracking in Pavements - Assessment and Control*. Edited by RIGO J.M. et DEGEIMBRE R. 1989, pp. 49–56.
- [Zhang et Li, 2002] ZHANG J. et LI V.C. Monotonic and fatigue performance in bending of fiber-reinforced engineered cementitious composite in overlay system. *Cement and Concrete Research*, 2002, vol 32, pp. 415–423.
- [Zhou et al., 2004] ZHOU F., CHEN D., SCULLION T. et WILLIAMMEE R. Overlay tester : a simple test to evaluate the reflective cracking resistance of asphalt mixtures. *5<sup>th</sup> International RILEM Conference on Cracking in Pavements - Mitigation, Risk Assessment and Prevention*. Edited by PETIT C., AL-QADI I.L. et MILLIEN A. 2004, pp. 597–604.

# Table des figures

1	Présentation du contexte industriel de la thèse . . . . .	9
1.1	A periodic lattice of interacting particles (a) A 2 - <i>type</i> hexagonal lattice and (b) Interaction forces and moments . . . . .	15
1.2	Beam with non-uniform thickness . . . . .	24
1.3	(a) Hexagonal cellular lattice and (b) Geometry of the unit cell . . . . .	27
1.4	Forces and moments in the unit cell . . . . .	27
1.5	Regular lattice with $\Delta\tilde{t} = 0$ . . . . .	31
1.6	Regular lattice with $\Delta\tilde{t} \neq 0$ , $\tilde{s}_0 = 0.5$ . . . . .	31
1.7	Normalized Young modulus versus $\tilde{s}_0$ for $\tilde{t}^m = 0.15$ and different $\Delta\tilde{t}$ . . . . .	32
1.8	Poisson ratio versus $\tilde{s}_0$ for $\tilde{t}^m = 0.15$ and different $\Delta\tilde{t}$ . . . . .	33
1.9	Strength domain of the beam in the plane $\tilde{N} = 0$ for three $(\Delta\tilde{t}, \tilde{s}_0)$ . . . . .	33
1.10	Strength domain of the beam in the plane $\tilde{Q} = 0$ for three $(\Delta\tilde{t}, \tilde{s}_0)$ . . . . .	34
1.11	Dependence of the deviatoric yield strength $\Sigma$ upon the inclination $\Omega$ of principal stresses relative to the microstructure for $\tilde{t}^m = 0.15$ (a) $\Delta\tilde{t} = 0\%$ , (b) $\Delta\tilde{t} = 20\%$ , (c) $\Delta\tilde{t} = 40\%$ and (d) $\Delta\tilde{t} = 60\%$ . . . . .	35
1.12	Dependence of the maximum ( $\Omega = 0^0$ ) and the minimum ( $\Omega = 15^0$ ) deviatoric yield strength upon $\tilde{s}_0$ for $\Delta\tilde{t} = 40\%$ and $\tilde{t}^m = 0.15$ . . . . .	35
1.13	Yield surface for $\tilde{t}^m = 0.15$ and selected values of $\Delta\tilde{t}$ (a) $\Delta\tilde{t} = 0\%$ , (b) $\Delta\tilde{t} = 20\%$ , (c) $\Delta\tilde{t} = 40\%$ and (d) $\Delta\tilde{t} = 60\%$ . . . . .	36
1.14	Unit cells . . . . .	37
1.15	The ultimate yield surface for anisotropic 2D cellular material with relative density $\rho^* = 0.1045$ . . . . .	38
1.16	Stress-strain diagram for $\rho^* = 0.1045$ and $\phi = 0$ . . . . .	40
1.17	(a) Numerical validation of the ultimate yield surface for anisotropic 2D cellular material with relative density $\rho^* = 0.1045$ , (b) Zoom on the domain ( $\Sigma_{11} \geq 0.008\sigma^*$ , $\Sigma_{22} \geq 0.05\sigma^*$ ) and (c) Zoom on the domain ( $\Sigma_{11} \leq -0.008\sigma^*$ , $\Sigma_{22} \leq -0.05\sigma^*$ ) . . . . .	41
1.18	Comparison of the proposed model with load-displacement response from a crushing experiment on aluminum honeycomb by (Papka and Kyriakides, 1997) . . . . .	42
2.1	Interaction forces and moments . . . . .	47
2.2	Beam with non-uniform thickness . . . . .	50
2.3	Strength domain of the beam in the $\tilde{N} = 0$ plane for three $(\Delta\tilde{S}, \tilde{s}_0)$ . . . . .	53

2.4	Strength domain of the beam in the $\tilde{Q} = 0$ plane for three $(\Delta\tilde{S}, \tilde{s}_0)$ . . . . .	54
2.5	Quadratic approximation of the strength domain of the beam in the $\tilde{N} = 0$ plane for $(\tilde{S}_m = 0.15, \Delta\tilde{S} = 0.2, \tilde{s}_0 = 0.2)$ . . . . .	54
2.6	Quadratic approximation of the strength domain of the beam in the $\tilde{Q} = 0$ plane for $(\tilde{S}_m = 0.15, \Delta\tilde{S} = 0.2, \tilde{s}_0 = 0.2)$ . . . . .	55
2.7	(a) Unit cell of a tetrakaidecahedral lattice, (b) Unit cell with $\Delta\tilde{S} \neq 0, \tilde{s}_0 \neq 0$ . .	55
2.8	Yield surface in the $\Sigma_{11} = \Sigma_{22}$ plane for three $(\Delta\tilde{S}, \tilde{s}_0)$ . . . . .	57
2.9	Yield surface in the $\Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \Sigma_{33} = 3p$ plane for $\tilde{S}_m = 0.15, \Delta\tilde{S} = 0, \tilde{s}_0 = 0$ and four values of $p$ . . . . .	58
2.10	Yield surface in the $\Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \Sigma_{33} = 3p$ plane for $\tilde{S}_m = 0.15, \Delta\tilde{S} = 0.2, \tilde{s}_0 = 0$ and four values of $p$ . . . . .	58
2.11	Yield surface in the $\Sigma_{11} + \Sigma_{22} + \Sigma_{33} = 3p$ plane for $\tilde{S}_m = 0.15, \Delta\tilde{S} = 0.2, \tilde{s}_0 = 0.2$ and four values of $p$ . . . . .	59
3.1	La structure multicouche d'une chaussée [LCPC-SETRA, 1994] . . . . .	68
3.2	Epaisseur de la couche de surface en matériaux bitumineux pour les chaussées à faible trafic, à assise granulaire [LCPC-SETRA, 1994] . . . . .	76
4.1	Les différents aspects des fissures [Colombier, 1997] . . . . .	83
4.2	Les différents motifs des fissures [Colombier, 1997] . . . . .	83
4.3	Pression de contact verticale appliquée par une charge de 50kN avec une pression de gonflement de 900kPa [Molenaar et Potter, 1997] . . . . .	84
4.4	Contrainte longitudinale en fonction du temps sous le centre de la charge roulante à une profondeur de 0.0165m [Tamagny et al., 2004] . . . . .	85
4.5	Mode I : ouverture . . . . .	86
4.6	Mode II : cisaillement . . . . .	86
4.7	Mode III : déchirement . . . . .	87
4.8	Les mouvements possibles des lèvres de la fissure [Colombier, 1997] . . . . .	87
4.9	Facteurs d'intensité de contrainte de trafic adimensionnels en mode I et II en fonction de la longueur de fissure adimensionnelle ( $c/d$ , où $c$ et $d$ représentent la longueur de la fissure et l'épaisseur totale de la chaussée existante et de la couche supérieure ajoutée, respectivement) [Lytton, 1989] . . . . .	88
4.10	Facteurs d'intensité de contrainte thermique adimensionnels en mode I en fonction de la longueur de fissure adimensionnelle ( $c/d$ , où $c$ et $d$ représentent la longueur de la fissure et l'épaisseur totale de la chaussée existante et de la couche supérieure ajoutée, respectivement) [Lytton, 1989] . . . . .	89
4.11	Le développement de la fissuration. Structure partiellement fissurée sous chargement thermique et de trafic (Schéma 1 : Propagation horizontale - propagation verticale prédominante - Fissure centrée - Fissure décentrée - Structure fissurée avec interface décollée. Schéma 2 : Propagation verticale - Structure fissurée avec interface collée [Goacolou et Marchand, 1982] . . . . .	90
4.12	Evolution de la hauteur fissurée $f$ en fonction du temps $J$ en jours [LCPC, 1988] .	91
4.13	Schématisation des techniques de préfissuration [Vanelstraete et de Bondt, 1997] .	92

4.14 Fissuration réfective en termes de (a) nombre de fissures et (b) longueur de fissures [Ellis et Dudgeon, 2004] . . . . .	93
4.15 Mise en place de la grille Tensar [TENSAR, 2002] . . . . .	96
4.16 Rotaflex : Grille en fibres de verre et membrane non tissée [6DSolutions, 2001] . . . . .	96
4.17 Mise en place de treillis soudés [REFLEX, 2002] . . . . .	96
4.18 MeshTrack : grille en acier tréfilé [BEKAERT, 2002] . . . . .	97
4.19 Mise en oeuvre du Metalflex (www.screg.fr) . . . . .	98
4.20 Répartition de la contrainte de traction dans la poutre au fur et à mesure de l'avancée de la fissuration ([Montestruque et al., 2004]) . . . . .	100
5.1 Schémas de principe de (a) flexion 3 points, (b) flexion 4 points, (c) flexion 2 points, (d) flexion par rotation . . . . .	102
5.2 Essai de traction indirecte . . . . .	103
5.3 Schéma d'un test d'arrachement [Vanelstraete et al., 1997] . . . . .	104
5.4 (a) Test de cisaillement direct de [Leutner, 1979], (b) Test de cisaillement direct de [Grzybowska et al., 1993] . . . . .	105
5.5 Test de cisaillement 4 points [de Bondt et Scarpas, 1994] . . . . .	105
5.6 Essai de flexion amélioré (a) reposant sur une couche d'élastomère, (b) avec charge roulante [Brown et Brunton, 1989] . . . . .	106
5.7 Schéma de principe de l'appareillage utilisé pour simuler la fissuration thermique [Clauwaert et Francken, 1989] . . . . .	107
5.8 Résultats d'essais de fissuration thermique réalisés sur différents types d'interfaces [Vanelstraete et al., 1997] . . . . .	107
5.9 Schéma de principe de l'essai de retrait-flexion [Dumas et Vecoven, 1993] . . . . .	108
5.10 Résultats d'essais de retrait-flexion pour des éprouvettes renforcées avec la grille Rotaflex [6DSolutions, 2001] . . . . .	108
5.11 Dispositif d'essai MMLS3 [Lee et Kim, 2004] . . . . .	109
5.12 Dispositif d'essai ALF [Qi et al., 2004] . . . . .	109
5.13 Dispositif d'essai FABAC . . . . .	110
5.14 Manège de fatigue du LCPC (www.lcpc.fr) . . . . .	110
5.15 Grille en fibres de verre Rotaflex 830SL . . . . .	112
5.16 Définition du sens de mise en place des grilles en fibres de verre . . . . .	113
5.17 Grille en acier tréfilé Mesh Track MT2 . . . . .	113
5.18 Définition du sens de mise en place des grilles en acier . . . . .	114
5.19 Grille Mesh Track équipée d'une tige pour améliorer l'ancrage . . . . .	114
5.20 Schéma d'une éprouvette pour l'essai de retrait-flexion . . . . .	115
5.21 Jauge de fissuration collée sur une éprouvette et reliée à la centrale d'acquisition . . . . .	116
5.22 Mesures brutes issues d'une jauge de fissuration et courbes enveloppes correspondantes	118
5.23 Interprétation des données brutes issues des deux jauges de fissuration par la courbe enveloppe des temps minimaux . . . . .	119
5.24 Courbe de fissuration moyenne des éprouvettes 509A, 509B et 509C . . . . .	120

5.25	Courbes de fissuration des éprouvettes issues des plaques (a) 506, (b) 509, (c) 530 et (d) 531 . . . . .	120
5.26	Comparaison des temps de fissuration pour les éprouvettes équipées d'un système de type sable enrobé . . . . .	121
5.27	Courbes de fissuration des éprouvettes issues de la plaque 511 . . . . .	122
5.28	Comparaison des temps réduits fibres de verre / sable enrobé . . . . .	122
5.29	Courbes de fissuration des éprouvettes issues des plaques (a) 514 et (b) 523 . . . . .	123
5.30	Comparaison des temps réduits Mesh Track / sable enrobé . . . . .	123
5.31	Propagation horizontale partielle de la fissure . . . . .	124
5.32	Courbes de fissuration des éprouvettes issues des plaques (a) 516, (b) 528 et (c) 532 . . . . .	125
5.33	Comparaison des temps solution ARCELOR / sable enrobé . . . . .	125
5.34	Schéma descriptif des machines FABAC [Pouteau, 2004] . . . . .	127
5.35	Schéma de la piste d'essais . . . . .	128
5.36	Géométrie d'un essai . . . . .	129
5.37	Schema du positionnement des 16 jauges de déformation supplémentaires sur la grille de type solution ARCELOR . . . . .	129
6.1	Schéma d'une chaussée bicouche fissurée . . . . .	135
6.2	Schéma d'une coupe longitudinale d'une chaussée à proximité d'une fissure transversale . . . . .	136
6.3	Fonctionnement de la chaussée soumise à une charge centrée sur la fissure . . . . .	139
6.4	Fonctionnement de la chaussée soumise à une charge excentrée . . . . .	140
6.5	Schéma de calcul du multicouche tridimensionnel [Tran, 2004] . . . . .	146
6.6	Structure de chaussée étudiée . . . . .	147
6.7	Extrait de la discrétisation du plan ( $Oxy$ ) . . . . .	148
6.8	Variations en fonction de $x$ , en $y = 0$ , pour $t = t_1$ (a) de l'effort membranaire $\partial N_{xx}^1$ , (b) du moment de flexion $\partial M_{xx}^1$ . . . . .	149
6.9	Variations en fonction de $x$ , en $y = 0$ , pour $t = t_2^-$ de l'effort tranchant $\partial Q_x^1$ . . . . .	149
6.10	Variations en fonction de $y$ , en $x = 0$ , pour $t = t_1$ (a) de l'effort membranaire $\partial \bar{N}_{xx}^1$ , (b) du moment de flexion $\partial \bar{M}_{xx}^1$ . . . . .	151
6.11	Variations en fonction de $y$ , en $x = 0$ , (a) de l'effort tranchant $\partial \bar{Q}_x^1$ pour $t = t_2^-$ , (b) de l'angle moyen d'ouverture de la fissure $\partial \phi_x^2(x_{f+1}) - \partial \phi_x^2(x_f)$ pour $t = t_1$ . . . . .	151
6.12	Effort normal $\partial N(t)$ en fonction du temps $t$ . . . . .	152
6.13	Effort tranchant $\partial Q(t)$ en fonction du temps $t$ . . . . .	153
6.14	Moment de flexion $\partial M(t)$ en fonction du temps $t$ . . . . .	153
6.15	Contrainte en bas et en haut de la couche bitumineuse en fonction du temps $t$ . . . . .	154
6.16	Angle moyen d'ouverture de la fissure $\partial \Delta \phi(t)$ en fonction du temps $t$ . . . . .	154
7.1	Réaction de la chaussée lorsqu'elle est sollicitée par une charge de trafic . . . . .	158
7.2	Identification d'une éprouvette dans la chaussée . . . . .	159
7.3	Reprise de la charge de trafic $FT$ ( $xc = 0$ ) . . . . .	159
7.4	Effort normal $N(t)$ en fonction du temps $t$ . . . . .	161



7.5	Effort tranchant $Q(t)$ en fonction du temps $t$ . . . . .	162
7.6	Moment de flexion $M(t)$ en fonction du temps $t$ . . . . .	162
7.7	Schema de principe du bâti d'essai TRAFIC . . . . .	163
7.8	Schema de principe du bâti d'essai SIFIRE . . . . .	164
7.9	Résultat exact pour la force horizontale $H_1^*(t)$ . . . . .	165
7.10	Résultat exact pour les forces verticales (a) $V_1^*(t)$ et (b) $V_2^*(t)$ . . . . .	165
7.11	Fonction sinus à $40Hz$ et forces verticales (a) $V_1^*(t)$ et (b) $V_2^*(t)$ . . . . .	166
7.12	Découpage de la fonction $Q(t)$ en cinq morceaux . . . . .	167
7.13	Découpage (a) de la fonction $\sigma_{sup}(t)$ en trois morceaux et (b) de la fonction $\sigma_{inf}(t)$ en cinq morceaux . . . . .	167
7.14	Approximation (a) de l'effort normal et (b) du moment de flexion . . . . .	168
7.15	Approximation de la force horizontale $H_1(t)$ . . . . .	169
7.16	Approximation des forces verticales (a) $V_1(t)$ et (b) $V_2(t)$ et sinusoides associées pour une fréquence de $40Hz$ . . . . .	169
7.17	Maillage de l'éprouvette et du bâti; conditions limites et de chargement appliquées	171
7.18	Déformée de la structure à $t = 0.0194s$ ou $i = 4$ . . . . .	172
7.19	Répartition de la contrainte longitudinale $\sigma_{xx}$ à $t = 0.0194s$ ou $i = 4$ . . . . .	172
7.20	Répartition de la contrainte de cisaillement $\sigma_{xy}$ à $t = 0.0194s$ ou $i = 4$ . . . . .	173
7.21	Déplacement $u_x$ des deux lèvres de la fissure à $t = 0.0194s$ ou $i = 4$ . . . . .	173
7.22	Evolution en fonction du temps de l'angle d'ouverture de la fissure dans la chaussée et dans l'éprouvette . . . . .	174
7.23	Démarche de dimensionnement du bâti d'essai SIFIRE . . . . .	175
8.1	Présentation du bâti d'essai . . . . .	177
8.2	Dispositif poutre + vérins d'application de la charge verticale . . . . .	178
8.3	Problème mécanique simplifiée de la poutre pour l'essai SIFIRE . . . . .	179
8.4	Problème mécanique simplifiée de la poutre pour l'essai TRAFIC . . . . .	179
8.5	Dispositif de type "bras de levier" d'application de la charge horizontale . . . . .	180
8.6	Schema du réseau de fils des nouvelles jauges de fissuration . . . . .	182
8.7	Schéma du positionnement des 8 jauges de déformation sur la grille de type solution ARCELOR . . . . .	182
8.8	Schema de principe du multiplexage réalisé pour récupérer les mesures sur une jauge de fissuration . . . . .	183
8.9	Schema de principe du système de pilotage et d'acquisition des données . . . . .	184
8.10	Plan de coffrage des éprouvettes . . . . .	186
8.11	(a) Armatures et réserves en fond de couche; (b) Vue générale du coffrage rempli de béton . . . . .	186
8.12	Vue générale des éprouvettes après mise en place de l'émulsion . . . . .	187
8.13	Mise en place de l'ECF sur une grille en acier . . . . .	187
8.14	Réserves recouvertes d'une planche dans lesquelles sont enfermés les fils reliés aux jauges . . . . .	188

8.15	(a) Mise en place de l'enrobé bitumineux au finisseur ; (b) Compactage de la couche	189
8.16	(a) Sciage des éprouvettes ; (b) Extraction des éprouvettes du coffrage . . . . .	189
8.17	Bâti d'essai SIFIRE et éprouvette mise en place . . . . .	190

# Liste des tableaux

3.1	Classes de portance à long terme de la plate-forme support [LCPC-SETRA, 1994]	68
3.2	Définition des classes de trafic [LCPC-SETRA, 1994]	75
4.1	Image Qualité du Réseau National en 1997 ( <a href="http://www.route.equipement.gouv.fr">www.route.equipement.gouv.fr</a> )	79
4.2	Pourcentage de remontée de fissures transversales (RN7) ([Ballié, 2004]) (complexe = MesTrack noyé dans un ECF)	98
5.1	Valeurs indicatives des caractéristiques des grilles et des non tissés disponibles dans le commerce [Vanelstraete et al., 1997]	104
5.2	Formulation $F1$ du sable enrobé	112
5.3	Formulation $F2$ du sable enrobé	112
5.4	Caractéristiques de la grille Rotaflex 830SL	112
5.5	Caractéristiques de la grille Mesh Track MT2	113
5.6	Formulation de l'enrobé coulé à froid	114
5.7	Formulation du béton bitumineux coulé au soufre	115
5.8	Formulation de la grave bitume GB0/14	115
5.9	Formulation du béton bitumineux BB0/6	116
5.10	Description des systèmes retardateurs de fissuration et des configurations testées lors de la campagne d'essais de retrait-flexion	117
5.11	Battement à proximité de l'essieu au niveau de chaque joint avant mise en place des couches supérieures	127
5.12	Description de la composition des planches d'essais FABAC	128
6.1	Valeurs limites et amplitude de variation des fonctions de référence	141
6.2	Composition granulométrique du BB0/6	144
6.3	Caractéristiques des couches de la structure de chaussée considérée	144
6.4	Valeurs numériques des limites et de l'amplitude de variation des fonctions de référence du problème auxiliaire pour la chaussée étudiée	155
7.1	Répartition de la charge de trafic $FT$ ( $xc = 0$ )	159
7.2	Points caractéristiques des approximations affines par morceaux des trois fonctions de référence calculées dans la chaussée	168
7.3	Points caractéristiques des approximations affines par morceaux des trois fonctions de chargement de l'éprouvette	169

7.4	Caractéristiques des matériaux constituant chaque partie . . . . .	171
8.1	Caractéristiques principales des vérins hydrauliques utilisés . . . . .	178
8.2	Caractéristiques principales du vérin pneumatique . . . . .	180
8.3	Résultats des essais de compression d'éprouvettes en béton . . . . .	185
A.1	Valeurs extrêmes des efforts dans la poutre . . . . .	215
A.2	Caractéristiques des profilés considérés . . . . .	219
A.3	Résistance de la section pour une poutre . . . . .	220
A.4	Résistance de la section pour deux poutres . . . . .	220
A.5	Résistance à la fatigue pour une poutre . . . . .	221
A.6	Résistance à la fatigue pour deux poutres . . . . .	221
A.7	Bilan des résultats obtenus pour les différentes configurations . . . . .	222

# Annexes



## Annexe A

# Dimensionnement de la poutre des bâtis d'essai TRAFIC et SIFIRE

Pour ce dimensionnement, nous considérons deux cas de chargement qui correspondent aux deux types d'essai qui pourront être réalisés sur le bâti. Nous rappelons que le schéma Fig. 8.3, respectivement Fig. 8.4, présente le problème mécanique simplifié des efforts s'exerçant sur la poutre lors d'un essai SIFIRE, respectivement essai TRAFIC.

Cette poutre étant en acier, elle est dimensionnée en imposant des critères de résistance mécanique et de résistance en fatigue réglementés par l'Eurocode 3 [CEN, 1992].

### A.1 Détermination des efforts dimensionnants

Dans le cas de l'essai SIFIRE, les équations d'équilibre s'écrivent sous la forme :

$$V_1(t) + P_2 - V_3(t) + V_2(t) = 0$$

$$V_1(t).(x_2 - x_1) + P_2.x_2 - V_3(t).(x_2 - x_3(t)) = 0$$

Nous en déduisons alors les expressions de  $V_3(t)$  et  $x_3(t)$ .

$$V_3(t) = V_1(t) + V_2(t) + P_2 \tag{A.1}$$

$$x_3(t) = x_2 - \frac{V_1(t)}{V_3(t)}.(x_2 - x_1) - \frac{P_2}{V_3(t)}.x_2 \tag{A.2}$$

Appelons  $x$  l'abscisse d'une section quelconque de la poutre ( $x_1 \leq x \leq x_2$  c'est-à-dire  $-1m \leq x \leq 1m$ ). La répartition des efforts intérieurs est alors la suivante :

si  $x_3(t) \leq 0$

$$N_p(x, t) = 0$$

$$Q_p(x, t) = \begin{cases} |V_1(t) & x_1 \leq x < x_3(t) \\ |V_1(t) - V_3(t) & x_3(t) \leq x < 0 \\ | - V_2(t) & 0 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

$$M_p(x, t) = \begin{cases} |V_1(t).(x_1 - x) & x_1 \leq x < x_3(t) \\ |V_1(t).(x_1 - x) - V_3(t).(x_3(t) - x) & x_3(t) \leq x < 0 \\ | - V_2(t).(x_2 - x) & 0 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

si  $x_3(t) > 0$

$$N_p(x, t) = 0$$

$$Q_p(x, t) = \begin{cases} |V_1(t) & x_1 \leq x < 0 \\ |V_1(t) + P_2 & 0 \leq x < x_3(t) \\ | - V_2(t) & x_3(t) \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

$$M_p(x, t) = \begin{cases} |V_1(t).(x_1 - x) & x_1 \leq x < 0 \\ |V_1(t).(x_1 - x) - P_2.x & 0 \leq x < x_3(t) \\ | - V_2(t).(x_2 - x) & x_3(t) \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

avec  $N_p(x)$  l'effort normal,  $Q_p(x)$  l'effort tranchant et  $M_p(x)$  le moment fléchissant selon  $Y$  dans la poutre.

Nous considérons à présent la configuration de l'essai TRAFIC. Les équations d'équilibre s'écrivent sous la forme :

$$F_1(t) + P_2 - F(t) + F_2(t) = 0$$

$$F_1(t).(x_2 - x_1) + P_2.x_2 - F(t).(x_2 - xc(t)) = 0$$

Dans ce cas,  $xc(t)$  est connu ainsi que  $F(t)$  qui est considéré égal à un demi-essieu de  $130kN$  :  $F(t) = 65kN$ . Par contre nous pouvons déduire des équations d'équilibre les expressions de  $F_1(t)$  et  $F_2(t)$ .

$$F_1(t) = \frac{-P_2.x_2 + F(t).(x_2 - xc(t))}{x_2 - x_1} \quad (A.3)$$

$$F_2(t) = F(t) - F_1(t) - P_2 \quad (A.4)$$

La répartition des efforts intérieurs est la suivante :



si  $xc(t) \leq 0$

$$N_p(x, t) = \begin{cases} F_1(t) \frac{xc(t)}{R} & x_1 \leq x < xc(t) \\ |(F_1(t) - F(t)) \frac{xc(t)}{R}| & xc(t) \leq x < 0 \\ |-F_2(t) \frac{xc(t)}{R}| & 0 \leq x < x_2 \end{cases}$$

$$Q_p(x, t) = \begin{cases} F_1(t) & x_1 \leq x < xc(t) \\ |F_1(t) - F(t)| & xc(t) \leq x < 0 \\ |-F_2(t)| & 0 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

$$M_p(x, t) = \begin{cases} F_1(t) \cdot (x_1 - x) & x_1 \leq x < xc(t) \\ |F_1(t) \cdot (x_1 - x) - F(t) \cdot (xc(t) - x)| & xc(t) \leq x < 0 \\ |-F_2(t) \cdot (x_2 - x)| & 0 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

si  $xc(t) > 0$

$$N_p(x, t) = \begin{cases} |-F_1(t) \frac{xc(t)}{R}| & x_1 \leq x < 0 \\ |- (F_1(t) + P_2) \frac{xc(t)}{R}| & 0 \leq x < xc(t) \\ |F_2(t) \frac{xc(t)}{R}| & xc(t) \leq x < x_2 \end{cases}$$

$$Q_p(x, t) = \begin{cases} F_1(t) & x_1 \leq x < 0 \\ |F_1(t) + P_2| & 0 \leq x < xc(t) \\ |-F_2(t)| & xc(t) \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

$$M_p(x, t) = \begin{cases} F_1(t) \cdot (x_1 - x) & x_1 \leq x < 0 \\ |F_1(t) \cdot (x_1 - x) - P_2 \cdot x| & 0 \leq x < xc(t) \\ |-F_2(t) \cdot (x_2 - x)| & xc(t) \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

Après avoir calculé les valeurs des efforts intérieurs en supposant que le poids  $P_2$  est négligeable, à différents instants  $t$  et pour différentes abscisses  $x$ , nous avons pu déterminer les valeurs extrémales de  $N_p$ ,  $Q_p$  et  $M_p$  pour les deux configurations d'essais (Tab. A.1).

	Essai SIFIRE	Essai TRAFIC	Efforts de dimensionnement
$\max(N_p)(kN)$	0	0.244	0.244
$\min(N_p)(kN)$	0	-0.244	
$N_p(kN)$			
$\max(Q_p)(kN)$	13.7	48.8	48.8
$\min(Q_p)(kN)$	-11.1	-48.8	
$Q_p(kN)$			
$\max(M_p)(kN.m)$	11.9	0	32.5
$\min(M_p)(kN.m)$	-6.19	-32.5	
$M_p(kN.m)$			

TABLEAU A.1. Valeurs extrémales des efforts dans la poutre

Nous remarquons donc que c'est les efforts créés dans le cas de l'essai TRAFIC qui sont dimensionnants. Dans la suite, nous ne considérons plus que cette configuration et les efforts dimensionnants correspondants :

$$N = 0.244kN ; Q = 48.8kN ; M = 32.5kN.m \quad (A.5)$$

De plus nous nous plaçons dans une situation sécuritaire en considérant que ces trois efforts agissent de façon simultanée.

Après calcul, nous avons trouvé qu'un assemblage de **deux poutres HE180AA** était la solution la plus légère et la moins encombrante pour vérifier les critères de résistance de la section et de résistance en fatigue, qui sont présentées ci-dessous. Les résultats obtenus pour les autres géométries sont présentés à la fin de cette annexe, dans les tableaux Tab. A.2, Tab. A.3, Tab. A.4, Tab. A.5, Tab. A.6 et Tab. A.7. Tous les profilés considérés sont en acier de type S235, c'est-à-dire  $f_y = 235\text{MPa}$  ( $f_y$  = limite d'élasticité), avec une section en H ou en I de classe 1 ou 2 selon la classification de l'Eurocode 3.

## A.2 Vérification de la résistance mécanique

L'Eurocode 3 prévoit la vérification des sections par rapport à chaque type d'effort puis par rapport à leur combinaison.

En ce qui concerne l'effort normal, il faut vérifier que :

$$\frac{N}{N_{pl,Rd}} \leq 1 \text{ avec } N_{pl,Rd} = \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M0}} \quad (\text{A.6})$$

où  $N_{pl,Rd}$  est la résistance plastique de la section brute,  $A$  est la section du profilé et  $\gamma_{M0}$  est un coefficient de sécurité égal à 1 pour les sections brutes des profilés de classe 1, 2 et 3. Pour le double profilé HE180AA choisi, la valeur de l'effort normal limite est  $N_{pl,Rd} = 1715\text{kN}$ . Le critère est donc largement vérifié.

De même, l'effort tranchant  $Q$  doit vérifier la relation suivante :

$$\frac{Q}{V_{pl,Rd}} \leq 1 \text{ avec } V_{pl,Rd} = \frac{A_v \cdot f_y}{\sqrt{3} \cdot \gamma_{M0}} \quad (\text{A.7})$$

où  $V_{pl,Rd}$  est la résistance plastique en cisaillement et  $A_v$  est l'aire de cisaillement, qui est calculée en fonction des données géométriques des profilés. Nous simplifierons la détermination de  $A_v$  en considérant que l'aire de cisaillement est égale à l'aire de l'âme  $A_w$ . Avec  $V_{pl,Rd} = 227\text{kN}$ , la solution retenue permet de vérifier le critère de résistance à l'effort tranchant.

Ensuite, pour les classes 1 et 2, le moment de flexion  $M$  est comparé au moment de résistance plastique de la section brute  $M_{pl,Rd}$ . Il faut donc vérifier que :

$$\frac{M}{M_{pl,Rd}} \leq 1 \text{ avec } M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} \cdot f_y}{\gamma_{M0}} \quad (\text{A.8})$$

où  $W_{pl}$  est le module d'inertie plastique de la section, dépendant des caractéristiques géométriques de la section choisie. La géométrie de profilé choisie permet d'obtenir un  $M_{pl,Rd} = 115\text{kN.m}$  supérieur au moment  $M = 32.5\text{kN.m}$  dimensionnant.

Nous considérons par ailleurs deux combinaisons d'efforts : moment fléchissant et effort normal, moment fléchissant et effort tranchant. Dans le premier cas, l'Eurocode 3 considère qu'il n'y a pas d'interaction lorsque :

$$N \leq \min\left(\frac{N_{pl,Rd}}{4}; \frac{A_w \cdot f_y}{2}\right)$$

avec  $A_w$  l'aire de l'âme. Si cette relation n'est pas vérifiée, alors il faut prendre en compte l'interaction du moment fléchissant et de l'effort normal :

$$M \leq M_{N,Rd} \text{ avec } M_{N,Rd} = M_{pl,Rd} \frac{1 - n}{1 - 0.5a}$$

où  $a = \min(\frac{A_w}{A}; 0.5)$  et  $n = \frac{N}{N_{pl,Rd}}$  L'interaction entre le moment fléchissant et l'effort tranchant est à considérer lorsque :

$$Q > 0.5V_{pl,Rd}$$

en vérifiant que :

$$M \leq M_{V,Rd} \text{ avec } M_{V,Rd} = \left( W_{pl} - \frac{\rho \cdot A_v^2}{4t_w} \right) \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

où  $t_w$  est l'épaisseur de l'âme et  $\rho = \left( \frac{2Q}{V_{pl,Rd}} - 1 \right)^2$ . Dans le cas retenu, ces deux types d'interaction ne sont pas à prendre en compte dans le dimensionnement.

### A.3 Vérification de la résistance en fatigue

Nous proposons de dimensionner la poutre à la fatigue pour un nombre de cycles  $N_R = 15.10^6$ . Alors l'Eurocode 3 définit la résistance à la fatigue comme :

- $\Delta\sigma_R$  pour les contraintes normales avec  $\Delta\sigma_R^m \cdot N_R = \Delta\sigma_D^m \cdot 5.10^6$
- $\Delta\tau_R$  pour les contraintes de cisaillement avec  $\Delta\tau_R^m \cdot N_R = \Delta\tau_C^m \cdot 2.10^6$

où  $m$  est la pente de la courbe de fatigue (pour  $N_R = 15.10^6$ ,  $m = 5$ ),  $\Delta\sigma_D$  est la limite de fatigue à amplitude constante telle que  $\Delta\sigma_D = \left( \frac{2}{5} \right)^{\frac{1}{m}} \Delta\sigma_C$ ,  $\Delta\sigma_C$  et  $\Delta\tau_C$  sont les catégories d'amplitudes de contraintes normales et de cisaillement, qui dépendent des détails de construction des pièces. Pour des profilés non soudés tels que ceux que nous considérons, les valeurs de ces variables sont :  $\Delta\sigma_C = 160MPa$  et  $\Delta\tau_C = 100MPa$ . La résistance en fatigue des poutres que nous considérons, pour des sollicitations normales et de cisaillement, sont donc :

$$\Delta\sigma_R = 107MPa \text{ et } \Delta\tau_R = 67MPa$$

Les amplitudes de contrainte normale et de cisaillement qui doivent être comparées à ces résistances sont notées  $\Delta\sigma_E$  et  $\Delta\tau_E$ . Ces valeurs sont calculées à partir des valeurs des sollicitations maximales considérées (A.5) :

$$\Delta\sigma_E = \frac{\Delta M}{W_{el}} \text{ avec } \Delta M = M = 32.5kN.m$$

$$\Delta\tau_E = \frac{\Delta Q}{A_w} \text{ avec } \Delta Q = 2Q = 97.6kN$$

avec  $W_{el}$  le module d'inertie élastique de la section. Pour la section retenue (2 poutres HE180AA), nous avons calculé :

$$\Delta\sigma_E = 69MPa \text{ et } \Delta\tau_E = 58MPa$$

La résistance en fatigue d'un élément est assurée si les trois relations suivantes sont vérifiées :

$$\frac{\gamma_{Ff} \cdot \Delta\sigma_E}{\Delta\sigma_R / \gamma_{Mf}} \leq 1 \quad (A.9)$$

$$\frac{\gamma_{Ff} \cdot \Delta\tau_E}{\Delta\tau_R / \gamma_{Mf}} \leq 1 \quad (A.10)$$

$$\left( \frac{\gamma_{Ff} \cdot \Delta\sigma_E}{\Delta\sigma_R / \gamma_{Mf}} \right)^3 + \left( \frac{\gamma_{Ff} \cdot \Delta\tau_E}{\Delta\tau_R / \gamma_{Mf}} \right)^5 \leq 1 \quad (A.11)$$

avec  $\gamma_{Ff}$  le coefficient partiel de sécurité sur les charges de fatigue et  $\gamma_{Mf}$  le coefficient partiel de sécurité sur la résistance à la fatigue. Ce dimensionnement étant réalisé dans le cadre d'un essai de laboratoire, les charges sont contrôlées et les conséquences d'une rupture sont minimales. Nous

pouvons donc choisir  $\gamma_{Mf} = 1$  et  $\gamma_{Ff} = 1$ . La géométrie de section choisie permet donc de vérifier ces trois inéquations.

Nous avons donc déterminé une structure en acier permettant de résister aux efforts cycliques imposés. Le dimensionnement a été réalisé sans prendre en compte l'inertie apportée par les pièces transverses permettant l'assemblage des deux profilés. Cette situation est donc sécuritaire.

Par ailleurs, nous pouvons vérifier a posteriori que l'hypothèse de poids de la poutre négligeable était justifiée. La structure complète considérée a une masse de  $380kg$ . Le calcul des efforts dimensionnants prenant en compte le poids  $P_2$  conduit aux valeurs suivantes :

$$N = 0.234kN ; Q = 46.9kN ; M = 30.6kN.m$$

Nous constatons que la prise en compte du poids de la poutre est négligeable et même favorable au dimensionnement réalisé puisqu'elle diminue la valeur des charges dimensionnantes.

Profils	Dimensions (mm)					Caractéristiques de calcul			
	$h$	$b$	$t_w$	$t_f$	$d$	$A$ ( $m^2$ )	$I_y$ ( $m^4$ )	$W_{el,y}$ ( $m^3$ )	$W_{pl,y}$ ( $m^3$ )
HE200B	200	200	9.0	15.0	134	$7.81 \cdot 10^{-3}$	$5.70 \cdot 10^{-5}$	$5.70 \cdot 10^{-4}$	$6.20 \cdot 10^{-4}$
HE100A	96	100	5.0	8.0	56	$2.12 \cdot 10^{-3}$	$3.49 \cdot 10^{-6}$	$7.28 \cdot 10^{-5}$	$7.84 \cdot 10^{-5}$
HE120A	114	120	5.0	8.0	74	$2.53 \cdot 10^{-3}$	$6.06 \cdot 10^{-6}$	$1.06 \cdot 10^{-4}$	$1.14 \cdot 10^{-4}$
IPE140	140	73	4.7	6.9	112	$1.64 \cdot 10^{-3}$	$5.41 \cdot 10^{-6}$	$7.73 \cdot 10^{-5}$	$8.58 \cdot 10^{-5}$
IPE160	160	82	5.0	7.4	127	$2.01 \cdot 10^{-3}$	$8.69 \cdot 10^{-6}$	$1.09 \cdot 10^{-4}$	$1.19 \cdot 10^{-4}$
HE140B	140	140	7.0	12.0	92	$4.30 \cdot 10^{-3}$	$1.51 \cdot 10^{-5}$	$2.16 \cdot 10^{-4}$	$2.39 \cdot 10^{-4}$
HE160A	152	160	6.0	9.0	104	$3.88 \cdot 10^{-3}$	$1.67 \cdot 10^{-5}$	$2.20 \cdot 10^{-4}$	$2.33 \cdot 10^{-4}$
HE180AA	167	180	5.0	7.5	122	$3.65 \cdot 10^{-3}$	$1.97 \cdot 10^{-5}$	$2.36 \cdot 10^{-4}$	$2.44 \cdot 10^{-4}$
IPE200	200	100	5.6	8.5	159	$2.85 \cdot 10^{-3}$	$1.94 \cdot 10^{-5}$	$1.94 \cdot 10^{-4}$	$2.10 \cdot 10^{-4}$

TABLEAU A.2. Caractéristiques des profilés considérés

1 poutre								
Profils	$N_{pl,Rd}$ $kN$	$V_{pl,Rd}$ $kN$	$M_{pl,Rd}$ $kN.m$	Interactions		$M_{N,Rd}$ $kN.m$	$M_{V,Rd}$ $kN.m$	BILAN
				$N/M$	$V/M$			
HE200B	1840	244	146	non	non	-	-	oui
HE100A	498	65.1	18.4	non	oui	-	17.8	non
HE120A	595	77.3	26.7	non	oui	-	26.5	non
IPE140	385	89.2	20.2	non	oui	-	20.1	non
IPE160	472	109	28.0	non	non	-	-	non
HE140B	1010	133	56.1	non	non	-	-	oui
HE160A	912	124	54.7	non	non	-	-	oui
HE180AA	858	113	57.4	non	non	-	-	oui
IPE200	670	152	49.3	non	non	-	-	oui

TABLEAU A.3. Résistance de la section pour une poutre

2 poutres								
Profils	$N_{pl,Rd}$ $kN$	$V_{pl,Rd}$ $kN$	$M_{pl,Rd}$ $kN.m$	Interactions		$M_{N,Rd}$ $kN.m$	$M_{V,Rd}$ $kN.m$	BILAN
				$N/M$	$V/M$			
HE200B	3670	488	291	non	non	-	-	oui
HE100A	996	130	36.8	non	non	-	-	oui
HE120A	1190	155	53.5	non	non	-	-	oui
IPE140	771	179	40.3	non	non	-	-	oui
IPE160	945	217	55.9	non	non	-	-	oui
HE140B	2020	266	112	non	non	-	-	oui
HE160A	1820	248	109	non	non	-	-	oui
HE180AA	1720	227	115	non	non	-	-	oui
IPE200	1340	304	98.5	non	non	-	-	oui

TABLEAU A.4. Résistance de la section pour deux poutres

1 poutre								
Profils	$\Delta\sigma_E$ MPa	$\Delta\tau_E$ MPa	$\Delta\sigma_R$ MPa	$\Delta\tau_R$ MPa	A.9 ok ?	Inégalités A.10 ok ?	A.11 ok ?	BILAN
HE200B	57.1	54.2	107	66.8	oui	oui	oui	oui
HE100A	446	203	107	66.8	non	non	non	non
HE120A	306	171	107	66.8	non	non	non	non
IPE140	420	148	107	66.8	non	non	non	non
IPE160	299	122	107	66.8	non	non	non	non
HE140B	151	99.6	107	66.8	non	non	non	non
HE160A	148	107	107	66.8	non	non	non	non
HE180AA	138	117	107	66.8	non	non	non	non
IPE200	167	87.1	107	66.8	non	non	non	non

TABLEAU A.5. Résistance à la fatigue pour une poutre

2 poutres								
Profils	$\Delta\sigma_E$ MPa	$\Delta\tau_E$ MPa	$\Delta\sigma_R$ MPa	$\Delta\tau_R$ MPa	A.9 ok ?	Inégalités A.10 ok ?	A.11 ok ?	BILAN
HE200B	28.5	27.1	107	66.8	oui	oui	oui	oui
HE100A	223	102	107	66.8	non	non	non	non
HE120A	153	85.6	107	66.8	non	non	non	non
IPE140	210	74.1	107	66.8	non	non	non	non
IPE160	149	61.0	107	66.8	non	oui	non	non
HE140B	75.4	50.0	107	66.8	oui	oui	oui	oui
HE160A	73.8	53.5	107	66.8	oui	oui	oui	oui
HE180AA	69.0	58.4	107	66.8	oui	oui	oui	oui
IPE200	83.6	43.6	107	66.8	oui	oui	oui	oui

TABLEAU A.6. Résistance à la fatigue pour deux poutres

	1 poutre			2 poutres		
Profils	Section et Fatigue	Masse <i>kg/m</i>	Conclusion	Section et Fatigue	Masse <i>kg/m</i>	Conclusion
HE200B	oui	61.3	trop haut	oui	122	trop lourd
HE100A	non	-	ne résiste pas	non	-	ne résiste pas
HE120A	non	-	ne résiste pas	non	-	ne résiste pas
IPE140	non	-	ne résiste pas	non	-	ne résiste pas
IPE160	non	-	ne résiste pas	non	-	ne résiste pas
HE140B	non	-	ne résiste pas	oui	67.4	trop lourd
HE160A	non	-	ne résiste pas	oui	60.8	trop lourd
<b>HE180AA</b>	non	-	ne résiste pas	<b>oui</b>	<b>57.4</b>	<b>SOLUTION</b>
IPE200	non	-	ne résiste pas	oui	44.8	trop haut

TABLEAU A.7. Bilan des résultats obtenus pour les différentes configurations